大規模書店における最適化レジ配置モデル

2008MI229 祖父江裕介

指導教員：澤木勝茂

1　はじめに

私は日常でよく行く書店の待ち行列について研究する。大規模な書店では、様々な種類の本が売られ、多くのレジが用意されている。私は、レジが多すぎるのではないかと考え、レジ配置モデルを考察する。

2　$G/M/k$ 待ち行列モデル

2.1　モデル化

$G/M/k$ 待ち行列とは、客の到着分布が一般分布に従い、指数サービスであり、レジが k 個存在する待ち行列である。

システム A には 6 個のレジ、システム B とシステム C には 9 個のレジが配置されているが、客の到着数によって、店員の人数は異なる。A,B,C にはそれぞれ 1 つずつの行列が存在し、客の許容人数は上限がないものとする。

客の到着は、買う本によって異なり、それぞれのタイプは次のようになる。

タイプ 1(洋書, コミック, 美術書, 趣味・生活)

A の行列に並ぶ

タイプ 2(文庫・新書, 資格書, 人文書, 雑誌, 地図・ガイド書, コンピュータ書, 理工書)

B の行列に並ぶ

タイプ 3(文芸書, ベストセラー書, ビジネス書, 法律経済書, ノンフィクション)

C の行列に並ぶ

タイプ 4(児童書, 学習参考書, 辞書, 語学書, 医学書・看護書)

A または B の行列に並ぶ

レジには優先順位があり、レジ番号の小さいほうが優先される。(レジ番号が低いほど、サービス時間が短い。)

レジの数は、客の到着数によって変えることができるものとする。

到着分布は一般分布であるが、指数サービスである。したがって、到着したときの人数を状態として考えるとそれまでにサービスを終えた人数のみに依存する。つまり、$G/M/k$ 待ち行列はマルコフ連鎖に従う。

2.2　変数定義

μ_i:レジ i のサービス時間 (i=1,2, ･･･ ,24)(人/時)

π_j:状態 j における定常分布

P_{ij}:状態 i 人から状態 j 人への推移確率

$G_i(t)$:システム i における到着の分布 (i=A,B,C)

θ_i:状態 i のときのレジの状態を表すベクトル。客がいるとき 1、いないとき 0 の値をとる。

ϵ_{in} : θ_i の n 番目の要素

T_k:k 人までサービスするときにかかる時間

W:平均待ち時間 (時)

2.3　計算

$G/M/k$ 待ち行列のとき、P_{ij} は次にように変化する。

1. $j > i+1$ のとき

$$P_{ij} = 0$$

2. $j \le i+1 \le k$ のとき

$$\begin{aligned} P_{ij} &= \int_0^\infty P\{t \text{ 間に } (i+1-j) \text{ 人が出て、} j \text{ 人が残る }\} dG(t) \\ &= \int_0^\infty \sum_{\theta_j} \prod_{n=1}^{k} \prod_{\epsilon_{in}=1,\epsilon_{jn}=0} (1-\mathrm{e}^{-\mu_n t}) \\ &\qquad \prod_{\epsilon_{in}=1,\epsilon_{jn}=1} (\mathrm{e}^{-\mu_n t}) dG(t) \end{aligned}$$

3. $i+1 \ge j \ge k$ のとき

$$\begin{aligned} P_{ij} &= \int_0^\infty P\{t \text{ 間に } (i+1-j) \text{ 人到着 }\} dG(t) \\ &= \int_0^\infty \mathrm{e}^{-(\mu_1+\cdots+\mu_k)t} \frac{((\mu_1+\cdots+\mu_k)t)^{i+1-j}}{(i+1-j)!} dG(t) \end{aligned}$$

4. $i+1 \ge k > j$ のとき

$$\begin{aligned} P_{ij} &= \int_0^\infty \int_0^t P\{t \text{ 間に } (i+1-j) \text{ 人到着 } | T_k = s\} \\ &\qquad \mathrm{e}^{-(\mu_1+\cdots+\mu_k)s} \frac{((\mu_1+\cdots+\mu_k)s)^{i-k}}{(i-k)!} ds dG(t) \\ &= \int_0^\infty \int_0^t \sum_{\theta_j} \prod_{n=1}^{k} \prod_{\epsilon_{in}=1,\epsilon_{jn}=0} (1-\mathrm{e}^{-\mu_n (t-s)}) \\ &\qquad \prod_{\epsilon_{in}=1,\epsilon_{jn}=1} (\mathrm{e}^{-\mu_n (t-s)}) \mathrm{e}^{-(\mu_1+\cdots+\mu_k)s} \\ &\qquad \frac{((\mu_1+\cdots+\mu_k)s)^{i-k}}{(i-k)!} ds dG(t) \end{aligned}$$

ここで、β と c を次のように置く。

$$\beta = \int_0^\infty \mathrm{e}^{-(\mu_1+\cdots+\mu_k)(1-\beta)t} dG(t)$$

$$\pi_{k-1+j} = c\beta^j, j = 0, 1, \cdots$$

このとき W を計算する。

$$W = \sum_{n=0}^{\infty} E[\text{システムにいる時間} \mid n \text{ 人到着}] P\{n \text{ 人到着 }\}$$

ここで、

$$E[\text{システムにいる時間} \mid n \text{ 人到着}]$$

$$= \begin{cases} \frac{1}{\mu_1} + \cdots + \frac{1}{\mu_n} (n \leq k) \\ \frac{n}{\mu_n + \cdots + \mu_k} (n \geq k+1) \end{cases}$$

であるから、

$$W = \sum_{n=1}^{k} (\frac{1}{\mu_1} + \cdots + \frac{1}{\mu_n}) \pi_n + \sum_{n=k+1}^{\infty} \frac{n}{\mu_1 + \cdots + \mu_k} \pi_n$$

となる。したがって、

$$W = \sum_{n=1}^{k} (\frac{1}{\mu_1} + \cdots + \frac{1}{\mu_n}) \pi_n + \frac{c\beta^2 (k(1-\beta)+1)}{(1-\beta)^2 (\mu_1 + \cdots + \mu_k)}$$

となる。

3 数値計算 G/M/k 待ち行列モデル

実際のデータからグラフ $G_i(t), i = A, B, C$ を予測し、そのときの W を考察する。平日のとき、システム A とシステム B は似たような分布と予測されたため、同じ分布としている。

表 1 平日の $G_A(t), G_B(t)$ における β と W

$G_A(t), G_B(t)$	β	W
$k=2$	0.9979	1.597808126
$k=3$	0.9986	0.006078323
$k=4$	0.999	0.0000335623
$k=5$	0.9991	0.0000234553
$k=6$	0.9993	0.0000195139

表 2 平日の $G_C(t)$ における β と W

$G_C(t)$	β	W
$k=2$	0.9964	1.230402457
$k=3$	0.9976	0.008261675
$k=4$	0.9982	0.0000603525
$k=5$	0.9986	0.0000399392
$k=6$	0.9988	0.0000331741

表 3 休日の $G_A(t)$ における β と W

$G_A(t)$	β	W
$k=2$	0.997	1.564849408
$k=3$	0.998	0.010881012
$k=4$	0.9985	0.000631829
$k=5$	0.9988	0.000399552
$k=6$	0.999	0.0000331742

表 4 休日の $G_B(t)$ における β と W

$G_B(t)$	β	W
$k=2$	0.9968	1.438032596
$k=3$	0.9979	0.010113284
$k=4$	0.9984	0.0000621079
$k=5$	0.9987	0.0000399464
$k=6$	0.9989	0.0000331741

表 5 休日の $G_C(t)$ における β と W

$G_C(t)$	β	W
$k=2$	0.9962	1.144553123
$k=3$	0.9975	0.007762037
$k=4$	0.9981	0.0000596283
$k=5$	0.9985	0.0000399331
$k=6$	0.9988	0.0000331741

4 考察

本研究から、$G/M/k$ 待ち行列モデルの P_{ij} はすべての組み合せの和を計算しなければならないため、複雑な式となった。到着分布によって β を計算できない場合があった。また、$G/M/k$ 待ち行列モデルの W がそれぞれのシステムにおいて $k=4$ から急激に減少していくのは π_0 が 99% 以上となったためである。したがって、レジ台数は 4 台以上にするべきである。また、$k=6$ 以上の場合、W がさらに減少していく。しかし、雑誌、書籍の発売日によって、到着分布が大きく変わる場合、レジを 7 台以上にした方がよい場合もある。

5 おわりに

本論文では、書店における待ち行列について考察した。到着分布を平日と休日に分け、$G/M/k$ 待ち行列における P_{ij},W を考察した。しかし、本研究で予測した到着分布は数式で表現が容易に可能であり、実際の到着分布では数式で表現が不可能であることが多い。したがって、到着分布を時間ごとに分けることでより実際の分布に近い分布にできると考えられる。

参考文献

[1] 尾崎俊治:『確率モデル入門』, 朝倉出版 (1996)

[2] Sheldon M.Ross:『Introduction to Probability Models,Sixth Edition』,Academic Press(1997)