高等学校数学における多角的解法

2008MI216 関恵太
指導教員：佐々木克巳

1 はじめに

現在, 理数離れが騒がれており, 数学に苦手意識をもっている生徒や興味や感心が薄れた生徒が増えている．本研究の目的は, 生徒にとって理解しやすく, 生徒が興味を持てる授業を教師の視点から考察することである．具体的には, 教科書の問題や, 過去の入学試験問題に対する多角的解法を見つけ, 授業内での重要事項の教授方法を考察する．

2 多角的解法

本章では, 多角的解法の意味と多角的解法例を示す．多角的解法とは,1 つの問に対する, 複数の解法や, 考え方のことである．これを生徒に示すことにより, 問に対する理解度や興味感心が高まると考える．そのため, 多角的解法の事例を多く見つけ, 教育現場に出た時に役立てたいと思う．次に見つけ出した多角的解法例を, 数学　A, 数学　B, 数学　C, 複数範囲の例を順に示す．卒業論文ではそれぞれ,5 個,7 個,6 個,3 個の例を挙げたが, 本稿ではそれらのうちの各 1 つを挙げる．

2.1 数学　A における多角的解法

問 1 3 辺の長さがそれぞれ a,b,c である三角形に半径 r の円が内接している. このとき, その三角形の面積を求めよ ([1]).

解法 1:与えられた, 三角形において, 長さ a の辺に対する角を θ とする. 余弦定理より,

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\theta$$

$$\cos\theta = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$$

三角比の性質 $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$ より,

$$\sin\theta = \frac{\sqrt{(a+b+c)(a+b-c)(a+c-b)(b+c-a)}}{2bc}$$

よって, 三角形の面積 S は,

$$S = \frac{1}{2}bc\frac{\sqrt{(a+b+c)(a+b-c)(a+c-b)(b+c-a)}}{2bc}$$

$$= \frac{\sqrt{(a+b+c)(a+b-c)(a+c-b)(b+c-a)}}{4}$$

解法 2:ヘロンの公式より, 三角形の面積 S は次のように表せる.

$$S = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} \quad (s = \frac{a+b+c}{2})$$

解法 3:与えられた三角形の辺 a,b,c の向かい側の頂点をそれぞれ A,B,C とし, △ ABC に内接する円の中心を O とする．△ OAB で, 円 O と辺 AB の接点を H とすると, AB ⊥ OH なので, △ OAB の面積は,$\frac{1}{2}cr$ である．同様に, △ OBC と△ OCA の面積はそれぞれ,$\frac{1}{2}ar$,$\frac{1}{2}br$ である．したがって, △ ABC の面積 S は,

$$S = \frac{1}{2}r(a+b+c)$$

2.2 数学　B における多角的解法

問 2 円 $x^2 + y^2 = 4$ と直線 $y = 2x + k$ の共有点の個数を求めよ ([2]).

解法 1:

$$x^2 + y^2 = 4 \tag{1}$$

$$y = 2x + k \tag{2}$$

とする．円 (1) の中心は (0,0), 半径は 2 である. また,(2) から,$2x - y + k = 0$ 円 (1) の中心と直線 (2) の距離 d は,

$$d = \frac{|k|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2}}$$

⟨1⟩ 円 (1) と直線 (2) が異なる 2 つの共有点をもつための条件は,$d < 2$, すなわち,

$$\frac{|k|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2}} < 2$$

両辺は負でないから,2 乗して整理すると,$k^2 < 20$, ゆえに,

$$-2\sqrt{5} < k < 2\sqrt{5}$$

⟨2⟩ 円 (1) と直線 (2) が接するための条件は,$d = 2$, すなわち,

$$\frac{|k|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2}} = 2$$

同様にして,

$$k = \pm 2\sqrt{5}$$

⟨3⟩ 円 (1) と直線 (2) が共有点をもたないための条件は,$d > 2$, すなわち,

$$\frac{|k|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2}} > 2$$

同様にして,$k^2 > 20$, ゆえに,

$$k < -2\sqrt{5}, 2\sqrt{5} < k$$

よって, 求める共有点の個数は

$-2\sqrt{5} < k < 2\sqrt{5}$　のときに　2 個
$k = \pm 2\sqrt{5}$　のときに　1 個
$k < -2\sqrt{5}, 2\sqrt{5} < k$　のときに　0 個

解法 2 :$y = 2x + k$ を $x^2 + y^2 = 4$ に代入して整理すると,

$$5x^2 + 4kx + k^2 - 4 = 0$$

となる. この 2 次方程式の判別式を D とすると,

$$\frac{D}{4} = (2k)^2 - 5(k^2 - 4) = -k^2 + 20$$

と表すことができる. よって, 求める共有点の個数は,

$D > 0$ すなわち $-2\sqrt{5} < k < 2\sqrt{5}$ のときに 2 個

$D = 0$ すなわち $k = \pm 2\sqrt{5}$ のときに 1 個

$D < 0$ すなわち $k < -2\sqrt{5}, 2\sqrt{5} < k$ のときに 0 個

2.3　数学　C における多角的解法

問 3 行列 $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -6 & 6 \end{pmatrix}, P = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ とする. このとき, 行列 A^3 を求めよ ([3] の問題をもとに作成).

解法 1:

$$A^3 = AAA = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -6 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -6 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -6 & 6 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -49 & 38 \\ -114 & 84 \end{pmatrix}$$

解法 2:ハミルトン・ケーリーの定理から, 行列 A に対して, 次の等式が成り立つ.

$$A^2 - (-1+6)A + -1 \cdot 6 - 2 \cdot (-6)E = 0$$

これを整理し,$A^2 =$ の形にすると,

$$A^2 = 5A - 6E$$

よって,

$$A^3 = A^2 A = (5A - 6E)A = 5A^2 - 6A$$

$$= 5(5A - 6E) - 6A = 19A - 30E$$

$$= 19 \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -6 & 6 \end{pmatrix} - 30 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -49 & 38 \\ -114 & 84 \end{pmatrix}$$

解法 3:行列 P について

$$\Delta = 1 \cdot 3 - 2 \cdot 2 = -1 \neq 0$$

ゆえに行列 P は逆行列 P^{-1} をもち,

$$P^{-1} = \frac{1}{-1} \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$

と表せる. また, $B = P^{-1}AP$ とすると

$$B = P^{-1} \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -6 & 6 \end{pmatrix} P = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

自然数 n に対して,

$$A^n = PB^nP^{-1}$$

が成り立つ. したがって,$n = 3$ のとき,

$$A^3 = PB^3P^{-1}$$

$$= P \begin{pmatrix} 27 & 0 \\ 0 & 8 \end{pmatrix} P^{-1} = \begin{pmatrix} -49 & 38 \\ -114 & 84 \end{pmatrix}$$

2.4　複数範囲における多角的解法

問 4 円 $x^2 + y^2 = r^2$ がある. このとき, 円周上の点 $P(x_1, y_1)$ から引いた接線の方程式が $x_1 x + y_1 y = r^2$ になることを証明せよ ([2],[4]).

解法 1:原点 O と円周上の点 P を結ぶ直線の傾きは,$\frac{y_1}{x_1}$ である. また, 点 P における接線の傾きは, 直線 OP の傾きと垂直なので, 接線の傾きは,$-\frac{x_1}{y_1}$ である.

したがって, 接線の方程式は,

$$y - y_1 = -\frac{x_1}{y_1}(x - x_1)$$

となる. 整理すると,

$$x_1 x + y_1 y = x_1^2 + y_1^2 = r^2$$

よって, 円 $x^2 + y^2 = r^2$ の円周上の点 $\mathrm{P}(x_1, y_1)$ から引いた接線の方程式は $x_1 x + y_1 y = r^2$ となる.

解法 2:接線上の点を $\mathrm{A}(x, y)$ とすると, $\overrightarrow{\mathrm{PA}} \perp \overrightarrow{\mathrm{OP}}$ または $\overrightarrow{\mathrm{PA}} = \overrightarrow{0}$ となる. よって,

$$\overrightarrow{\mathrm{PA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OA}} = 0$$

$$(\overrightarrow{\mathrm{OA}} - \overrightarrow{\mathrm{OP}}) \cdot \overrightarrow{\mathrm{OA}} = 0$$

$$\overrightarrow{\mathrm{OA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OP}} - |\overrightarrow{\mathrm{OP}}|^2 = 0$$

となる. また, $|\overrightarrow{\mathrm{OP}}| = r$ なので, 代入すると,

$$\overrightarrow{\mathrm{OA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OP}} = r^2$$

というベクトル方程式ができる. また,$\overrightarrow{\mathrm{OA}} = (x, y)$,$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = (x_1, y_1)$ なので,

$$(x, y) \cdot (x_1, y_1) = r^2$$

内積の公式より,

$$x_1 x + y_1 y = r^2$$

よって, 円 $x^2 + y^2 = r^2$ の円周上の点 $P(x_1, y_1)$ から引いた接線の方程式は $x_1 x + y_1 y = r^2$ となる.

3　おわりに

本研究では, 高等学校で使用されている教科書, センター試験の過去の問題を中心に多角的解法を調べていった. その結果, 様々な事例を見出すことができ, 実際の学校現場の授業で導入できると考える. しかし, 生徒の学習到達度によっては導入が困難な事例もある. また, 本研究は数学を教える本来の意向とは異なるので, 学習指導要領に従いながらも本研究で学習したことを取り入れていきたい. 今後, 学校現場などで使用されている教材を研究していき, 生徒にとって理解しやすい授業展開をしていきたい.

4　参考文献

[1] 川中　宣明　他:『数学　』, 数研出版, 東京,2006

[2] 川中　宣明　他:『数学　』, 数研出版, 東京,2007

[3] 木田　祐司　他:『数学 C』, 数研出版, 東京,2007

[4] 大島　利雄　他:『数学 B』, 数研出版, 東京,2007