形式体系と実際の証明

2008MI212　佐藤友亮
指導教員：佐々木克巳

1　はじめに

本研究の目的は，形式体系 SNK を用いて証明を書けるようになることである．具体的には，体系 SNK から導かれた実証明とチャートランド [2] などで示されている証明との相違点を見つけ，よりわかりやすく，簡潔な証明に近づけるためにはどのようにしたらよいかを考えた．

卒業論文では，まず，今回の命題に必要な推論規則を体系 SNK に追加をした．そして，チャートランド [2] の問題に対して，体系 SNK を用いた実証明を作成し，それらを [2] で与えられた実証明と比較をした．その後，好ましい実証明を作れるよう，比較で挙がった問題点に対して体系 SNK の拡張などの改善を行った．

本稿では，2 節で，改善前の方法による証明図と対応する実証明の例を挙げる．3 節では，2 節の実証明とチャートランド [2] の証明とを比較し，改善案を挙げる．4 節では，改善後の例を挙げる．卒業論文では 5 つの例を挙げたが，ここでは 2 節の例に対応するもののみを挙げる．体系 SNK と SNK の証明図から実際の証明を作る方法は，佐々木 [1] に従う．

2　体系 SNK に基づく証明

問題はチャートランド [2] のものを用いた．

命題 3.1　すべての奇数 n について，整数 $11n^2+5n+3$ は 4 で割れる．

証明図は図 3.1 のようになる．ただし，この図において $11k^2+11k+1$ を K とおき，$(w\to)$ は省略した．また佐々木 [1] の SNK の推論規則のほかに，次の推論規則も用いた．

$$\frac{\Gamma\to s=t \quad \Gamma\to P(t)}{\Gamma\to P(s)}\ (=_1)$$

$$\frac{\Gamma\to A=A_1 \quad \Gamma\to A_1=B}{\Gamma\to A=B}\ (=_2)$$

これらは代入と，等号の推移律を表記するための推論規則である．

図 3.1 をもとに実際の証明を完成させると以下のようになる．

(証明)
k が整数かつ $n=2k+1$ となる k が存在するということをみたす n が任意に与えられたとする．m が整数かつ $11n^2-7=4m$ となる m が存在することを示す．k が整数かつ $n=2k+1$ となる k を任意にとる．k は整数なので $11k^2+11k+1$ も整数である．$n=2k+1$ より

$$\begin{aligned}11n^2-7&=11(2k+1)^2-7\\&=11(4k^2+4k+1)-7\\&=44k^2+44k+11-7\\&=4(11k^2+11k+1)\end{aligned}$$

となる．$11k^2+11k+1$ は整数かつ $11n^2-7=4(11k^2+11k+1)$ である．これより m が整数かつ $11n^2-7=4m$ となる m が存在する．k が整数かつ $n=2k+1$ となる任意の k で「m が整数かつ $11n^2-7=4m$ となる m が存在する」ので，「m が整数かつ $11n^2-7=4m$ となる m が存在する」といえる．よって，「すべての n で，k が整数かつ $n=2k+1$ となる k が存在するならば，m が整数かつ $11n^2-7=4m$ となる m が存在する」ということがいえる．　□

3　実際の証明との比較と対応

この節では，3 節で作成した証明とチャートランド [2] の証明とを比較して，問題点とその改善案を挙げる．

● 推論規則 $(\exists\to)$ に対応する文について

「存在する」という文が多く出現し，どの変数がどういった役割や意味を果たしているかということがわかり

$\mathbb{P}$:

$$\frac{\{\}\to 11(2k+1)^2-7=11(4k^2+4k+1)-7 \qquad \dfrac{\{\}\to 11(4k^2+4k+1)-7=44k^2+44k+4 \quad \{\}\to 44k^2+44k+4=4K}{\{\}\to 11(4k^2+4k+1)-7=4K}\ (=_2)}{\{\}\to 11(2k+1)^2-7=4K}\ (=_2)$$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\{k\in\mathbb{Z}\}\to K\in\mathbb{Z} \qquad \dfrac{\{n=2k+1\}\to\{n=2k+1\} \qquad \mathbb{P}}{\{n=2k+1\}\to 11n^2-7=4K}\ (=_1)}{\{k\in\mathbb{Z},n=2k+1\}\to K\in\mathbb{Z}\wedge 11n^2-7=4K}\ (\to\wedge)}{\{k\in\mathbb{Z}\wedge n=2k+1\}\to K\in\mathbb{Z}\wedge 11n^2-7=4K}\ (\wedge\to)}{\{k\in\mathbb{Z}\wedge n=2k+1\}\to\exists m(m\in\mathbb{Z}\wedge 11n^2-7=4m)}\ (\to\exists)}{\{\exists k(k\in\mathbb{Z}\wedge n=2k+1)\}\to\exists m(m\in\mathbb{Z}\wedge 11n^2-7=4m)}\ (\exists\to)}{\{\}\to\forall n(\exists k(k\in\mathbb{Z}\wedge n=2k+1)\supset\exists m(m\in\mathbb{Z}\wedge 11n^2-7=4m))}\ (\to\forall\supset)$$

図 3.1　命題 3.1 の証明図 1

づらくなってる．また対応する文が多く出現することで文量も多くなってしまっている．これは，特に $(\exists\to)$ が影響していると考えられる．チャートランド [2] の実証明と比較すると，$(\exists\to)$ の部分に対応する文に関しては詳しい記述がないため，推論規則に対応する文を見直し，減らすこととした．この対応は佐々木 [1] の脚注で述べられている．

• 奇数，偶数の表現について

体系 SNK では偶数，奇数を事前に論理式に変換して，それを終式とする証明図を作成していた．論理式に一度変換してしまうと，その論理式が何を示しているのかが，とくに実証明においてわかりづらくなっていた．これに対応するために，体系 SNK で奇数，偶数の表現とそれらの定義に対応する (Def) を許し，対応する実証明にも偶数奇数が現れるようにした．

4 改善をした体系 SNK に基づく証明

前節で述べた改善点を踏まえ，命題 3.1 の実証明を作った．証明図は図 5.1 のようになる．ただし，この図において $11k^2+11k+1$ を K とおき，$(w\to)$ は省略した．

図 5.1 をもとに実際の証明を完成させると以下のようになる．

(証明)

奇数 n が任意に与えられたとする．n が奇数であることと定義より，$n=2k+1$ をみたす整数 k が存在する．$11n^2-7=4m$ をみたす整数 m が存在することを示す．k は整数なので $11k^2+11k+1$ も整数である．$n=2k+1$ より

$$\begin{aligned}11n^2-7 &= 11(2k+1)^2-7\\ &= 11(4k^2+4k+1)-7\\ &= 44k^2+44k+11-7\\ &= 4(11k^2+11k+1)\end{aligned}$$

である．$11k^2+11k+1$ は整数かつ $11n^2-7=4(11k^2+11k+1)$ である．これより $11n^2-7=4m$ をみたす整数 m が存在する．よって，すべての n で「n が奇数ならば，$11n^2-7=4m$ となる整数 m が存在する」．

□

改善する前の実証明に比べ，文量が減ったことにより読みやすさが上がった．奇数，偶数も実証明に反映されたので，理解もしやすくなったと思う．チャートランド [2] と比べると文量が多いが，言葉の使い方による違いであり，核となる部分は同じようにおさえることができた．このことより内容の理解しやすさには，大差はないと考える．改善は有効であった．

5 おわりに

体系 SNK の証明図をとおして実証明をつくる流れは，慣れれば比較的容易である．SNK 証明図の作成において，どの推論規則を適用すべきかは，論理式を見ればわかるから，どう表現するかを考えることよりも容易にできる．等式を含む証明に関していくつか比較を行うことで，実際に読みやすい証明とは何かということと，体系 SNK を利用して，読みやすい証明に近づけることはできる，ということが確認できた．

参考文献

[1] 佐々木克巳：シークエント体系の証明図から実証明を作る方法,『アカデミア　情報理工学編』，第 11 巻，南山大学，2011，pp.35-54

[2] ゲアリー・チャートランド　他 (鈴木 治郎 訳)：『証明の楽しみ』，株式会社ピアソンエデュケーション，2004

$\mathbb{Q}$:

$$\dfrac{\{\}\to 11(2k+1)^2-7=11(4k^2+4k+1)-7 \qquad \dfrac{\{\}\to 11(4k^2+4k+1)-7=44k^2+44k+4 \quad \{\}\to 44k^2+44k+4=4K}{\{\}\to 11(4k^2+4k+1)-7=4K}\;(=_2)}{\{\}\to 11(2k+1)^2-7=4K}\;(=_2)$$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\{k\in\mathbb{Z}\}\to K\in\mathbb{Z} \qquad \dfrac{\{n=2k+1\}\to\{n=2k+1\} \qquad \mathbb{Q}}{\{n=2k+1\}\to 11n^2-7=4K}\;(=_1)}{\{k\in\mathbb{Z}, n=2k+1\}\to K\in\mathbb{Z}\wedge 11n^2-7=4(K)}\;(\to\wedge)}{\{k\in\mathbb{Z}\wedge n=2k+1\}\to K\in\mathbb{Z}\wedge 11n^2-7=4(K)}\;(\wedge\to)}{\{k\in\mathbb{Z}\wedge n=2k+1\}\to \exists m(m\in\mathbb{Z}\wedge 11n^2-7=4m)}\;(\to\exists)}{\{\exists k(k\in\mathbb{Z}\wedge n=2k+1)\}\to \exists m(m\in\mathbb{Z}\wedge 11n^2-7=4m)}\;(\exists\to)}{\{\ n\text{ が奇数 }\}\to \exists m(m\in\mathbb{Z}\wedge 11n^2-7=4m)}\;(Def)}{\{\}\to \forall n(n\text{ が奇数}\supset \exists m(m\in\mathbb{Z}\wedge 11n^2-7=4m))}\;(\to\forall\supset)$$

図 5.1　命題 3.1 の証明図 2