一階非ホロノミック拘束を持つ Control Moment Gyro の非線形制御

2008MI192 太田 清士郎

指導教員：高見 勲

1 はじめに

本研究では, 一階非ホロノミック拘束という条件を持つ Control Moment Gyro (CMG) に対して, Cascaded Backstepping Control 手法 [1], [2] を用いた, 2 入力 3 状態の非線形制御を行う. CMG の運動方程式から, 一階非ホロノミック系の正準系 Chained Form へ変換し, Cascaded Backstepping Control 手法を用いて制御系設計を行う. 最後に, 設計した制御系を用いてシミュレーションと実験を行い, 制御系の評価を行う.

2 制御対象

CMG の概略図を図 1 に示す.CMG は, ロータ 1 とジンバル 2,3,4 の合計 4 つの剛体からなるシステムである. システムの入力は 2 つであり, ロータ 1 を回転させる入力トルク $T_1(t)$ とジンバル 2 を回転させる入力トルク $T_2(t)$ である. $q_1(t)$ はジンバル 2 からみたロータ 1 の相対角度を表し, $\omega_1(t)$ はロータ 1 の角速度を表す. $q_2(t)$ はジンバル 3 からみたジンバル 2 の相対角度を表し, $\omega_2(t)$ はジンバル 2 の角速度を表す. また, $q_3(t)$ はジンバル 4 からみたジンバル 3 の相対角度を表し, $\omega_3(t)$ はジンバル 3 の角速度を表す. そして, $q_4(t)$ はジンバル 4 の角度を表し, $\omega_4(t)$ はジンバル 4 の角速度を表す.

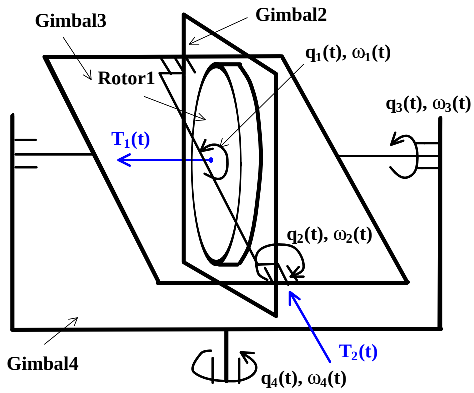

図 1 CMG の概略図

3 CMG の解析

3.1 CMG の運動方程式

本研究では, ジンバル 4 をロックした状態 ($q_4 = \omega_4 = \dot{\omega}_4 = 0$) の場合を考える. このとき, CMG の運動方程式は下式のようになる.

$$J_D\dot{\omega}_1 + J_D\dot{\omega}_3 - J_D\omega_2\omega_3\sin(q_2) = T_1 \tag{1}$$

$$\begin{aligned}(I_C + I_D)\dot{\omega}_2 + J_1\omega_3^2\sin(q_2)\cos(q_2)\\ + J_D\omega_1\omega_3\sin(q_2) = T_2\end{aligned} \tag{2}$$

$$\begin{aligned}(J_B + J_C + J_D - J_1\sin^2(q_2))\dot{\omega}_3 + J_D\dot{\omega}_1\cos(q_2)\\ - J_D\omega_1\omega_2\sin(q_2) - J_1\omega_2\omega_3\sin(2q_2) = 0\end{aligned} \tag{3}$$

ただし, 各パラメータは以下のように表す.

I_D, J_D : ロータ 1 の慣性モーメント [kg・m^2]
I_C, J_C, K_C : ジンバル 2 の慣性モーメント [kg・m^2]
J_B : ジンバル 3 の慣性モーメント [kg・m^2]
$J_1 = J_C + J_D - K_C - I_D$

3.2 一階非ホロノミック拘束

ジンバル 3 の運動方程式 (3) 式について考える. 本研究では, ジンバル 3 が初期状態において静止している状態を考える. このとき, (3) 式を一階積分することにより, 下式のような拘束条件を得る.

$$(J_B + J_C + J_D - J_1\sin^2(q_2))\omega_3 + J_D\omega_1\cos(q_2) = 0 \tag{4}$$

CMG の拘束条件 (4) 式には, ロータ 1, ジンバル 3 の角速度 ω_1, ω_3 が含まれている. (4) 式のように, システムの拘束条件に, システムの振る舞いを表現する座標の一階微分を含むものを一階非ホロノミック拘束と言う.

3.3 Chained Form への変換

制御系設計を行うために, CMG の運動方程式 (1), (2), (3) 式を一階非ホロノミックシステムの正準系 Chained Form へ変換する.

まず, システムの状態方程式を導出する. システムの状態変数を $q = [q_1\ q_2\ q_3]^T$, 入力をロータ 1, ジンバル 2 の角速度 ω_1, ω_2 とする. このとき, システムの状態方程式は下式になる.

$$\dot{q} = g_1(q)\omega_1 + g_2(q)\omega_2 \tag{5}$$

ただし, $g_1(q), g_2(q), \alpha(q_2)$ は以下のように表す.

$$g_1(q) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \alpha(q_2) \end{bmatrix}, \quad g_2(q) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{6}$$

$$\alpha(q_2) = \frac{-J_D\cos(q_2)}{J_B + J_C + J_D - J_1\sin^2(q_2)} \tag{7}$$

システムの状態方程式 (5) 式に対して, 以下の座標変換と入力変換を施す.

$$\begin{cases} x_1 = q_1 \\ x_2 = \alpha(q_2) \\ x_3 = q_3 \end{cases} \quad \begin{cases} u_1 = \omega_1 \\ u_2 = \beta(q_2)\omega_2 \end{cases} \tag{8}$$

ただし, $\beta(q_2) = \frac{d}{dq_2}\alpha(q_2)$ を表す.

ここで, 新たな状態変数を $x = [x_1\ x_2\ x_3]^T$, 入力を $u = [u_1\ u_2]^T$ とすると, システムは Chained Form と呼ばれる正準系に変換できる.

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = u_1 \\ \dot{x}_2 = u_2 \\ \dot{x}_3 = x_2u_1 \end{cases} \tag{9}$$

4　制御系設計

システム (9) 式に対して, Tracking Control を行う. 指令軌道 $x_d = [x_{1d}\ x_{2d}\ x_{3d}]^T$ を用意する. そして, 指令軌道 x_d は下式を満足する.

$$\begin{cases} \dot{x}_{1d} = u_{1d} \\ \dot{x}_{2d} = u_{2d} \\ \dot{x}_{3d} = x_{2d}u_{1d} \end{cases} \tag{10}$$

軌道偏差 $x_e = [x_{1e}\ x_{2e}\ x_{3e}]^T$ は下式で与えられる.

$$x_{ie} = x_i - x_{id} \quad (i = 1, 2, 3) \tag{11}$$

このとき, 軌道偏差のシステムは, (9), (10), (11) 式を用いて, 下式のように表現できる.

$$\begin{cases} \dot{x}_{1e} = u_1 - u_{1d} \\ \dot{x}_{2e} = u_2 - u_{2d} \\ \dot{x}_{3e} = x_2(u_1 - u_{1d}) + x_{2e}u_{1d} \end{cases} \tag{12}$$

軌道偏差のシステム (12) 式に対して, Cascaded Backstepping Control を用いて制御系設計を行う. 以下の 2 つの Subsystem を考える.

$$\Sigma_1 : \begin{cases} \dot{x}_{3e} = x_2(u_1 - u_{1d}) + x_{2e}u_{1d} \\ \dot{x}_{2e} = u_2 - u_{2d} \end{cases} \tag{13}$$

$$\Sigma_2 : \dot{x}_{1e} = u_1 - u_{1d} \tag{14}$$

それぞれの Subsystem Σ_1, Σ_2 を安定化させる入力 u_1, u_2 を設計する.

まず, Σ_2 について考える. 下式のような x_{1e} を安定化させる状態フィードバックを設計する.

$$\dot{x}_{1e} = u_1 - u_{1d} = -k_1 x_{1e} \quad (k_1 > 0) \tag{15}$$

このとき, x_{1e} を安定化させる入力 u_1 は下式になる.

$$u_1 = u_{1d} - k_1(x_1 - x_{1d}) \tag{16}$$

状態フィードバック $-k_1 x_{1e}$ より, 時間 t が十分経過したとき, $x_{1e} \to 0$ となるので, $(u_1 - u_{1d}) \to 0$ となる. この状態を維持したまま x_{2e}, x_{3e} の安定化を考える.

次に, Σ_1 について考える.
x_{2e}, x_{3e} を安定化させる入力 u_2 は下式になる.

$$u_2 = u_{2d} - L_2(x_2 - x_{2d}) - L_3(x_3 - x_{3d}) \tag{17}$$

ただし,　L_2, L_3 は以下のように表す.

$$L_2 = k_2 + k_3 {u^2}_{1d} \tag{18}$$
$$L_3 = k_3\dot{u}_{1d} + k_2 k_3 u_{1d} \tag{19}$$
$$(k_2, k_3 > 0)$$

設計した入力 (16), (17) 式を用いて, CMG の入力トルク T_1, T_2 を導出する. u_1, u_2 の一階微分 $\dot{u}_1, \dot{u}_2$ を用いて, ロータ 1, ジンバル 2 の角加速度 $\dot{\omega}_1, \dot{\omega}_2$ を設計すると, 下式になる.

$$\begin{aligned} \dot{\omega}_1 = &-G_1(u_1 - u_{1d} + k_1(x_1 - x_{1d})) \\ &+\dot{u}_{1d} - k_1(u_1 - u_{1d}) \end{aligned} \tag{20}$$

$$\begin{aligned} \dot{\omega}_2 = \frac{1}{\beta(q_2)}&(-G_2(u_2 - u_{2d} + L_2(x_2 - x_{2d}) + L_3(x_3 - x_{3d})) \\ &-\gamma(q_2){\omega_2}^2 + \dot{u}_{2d} - \dot{L}_2(x_2 - x_{2d}) - L_2(u_2 - u_{2d}) \\ &-\dot{L}_3(x_3 - x_{3d}) - L_3(x_2 u_1 - x_{2d}u_{1d})) \end{aligned} \tag{21}$$

ただし, $\gamma(q_2) = \frac{d}{dq_2}\beta(q_2)$ を表す.

設計したそれぞれの角加速度を運動方程式 (1), (2) 式に代入することで, 軌道追従のための入力トルク T_1, T_2 は下式になる.

$$T_1 = J_D\dot{\omega}_1 + J_D\dot{\omega}_3 - J_D\omega_2\omega_3\sin(q_2) \tag{22}$$

$$T_2 = (I_C + I_D)\dot{\omega}_2 + J_1\omega_3^2\sin(q_2)\cos(q_2) + J_D\omega_1\omega_3\sin(q_2) \tag{23}$$

5　実験検証

各剛体の指令軌道 q_{1d}, q_{2d}, q_{3d}, 各ゲインパラメータ G_1, G_2, k_1, k_2, k_3 を以下のように設定する.

$$\begin{cases} q_{3d} = \sin(0.5t)\ [\mathrm{rad}], \quad q_{2d} = 1\ [\mathrm{rad}] \\ q_{1d} = \frac{1}{\alpha(q_{2d})}\sin(0.5t)\ [\mathrm{rad}] \end{cases} \tag{24}$$

$$\begin{cases} G_1 = 10, \quad G_2 = 10 \\ k_1 = 7,\ k_2 = 5,\ k_3 = 0.0001 \end{cases} \tag{25}$$

このとき, シミュレーションと実験結果を以下に示す.

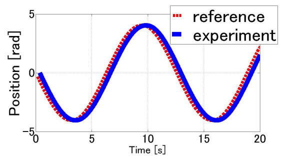

図 2　ロータ 1 の応答

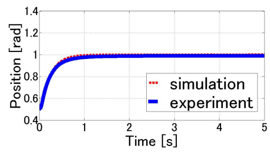

図 3　ジンバル 2 の応答

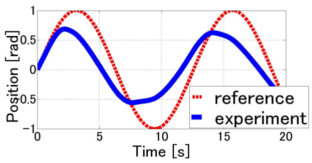

図 4　ジンバル 3 の応答

シミュレーションと実験結果の比較より, ロータ 1 とジンバル 2 に関しては, シミュレーションと同じ応答をしていることが分かる. 一方で, ジンバル 3 に関しては, シミュレーションと実験結果との間に大きな違いがあることが分かる.

6　おわりに

本研究の成果は, 以下の 2 点である.

1. 2 入力 3 状態の非ホロノミックシステムに対して, Tracking Control の制御系設計を行った.
2. 設計した制御系を用いて, シミュレーションと実験結果の比較を行った.

参考文献

[1] N.P.I Anake: Control of Underactuated Mechanical Systems, PhD thesis, Eindhoven University of Technology pp.55-65, 2003

[2] Jasper van de Loo: Control of Nonholonomic Control Moment Gyroscope,
Technische Universiteit Eindhoven Department Mechanical Engineering Dynamics and Control pp.23-26, 2006