円軌道上の相対運動方程式と周期軌道

2008MI169 西巻涼子
指導教員：市川 朗

1　はじめに

本研究では，円軌道上の主衛星とその近傍の従衛星の相対軌道の制御を行う．相対運動方程式を原点で線形化した Hill-Clohessy-Wiltshire 方程式を用いて，フィードバックを設計する．

2　相対運動の方程式

ニュートンの運動方程式を衛星の質量で割ると，方程式

$$\ddot{\boldsymbol{R}} + \frac{\mu}{R^3}\boldsymbol{R} = \boldsymbol{u} \tag{1}$$

が得られる．ここで $\boldsymbol{R}$ は地球の中心から人工衛星の重心までの位置ベクトル，$R = |\boldsymbol{R}|$，μ は地球の重力定数であり，万有引力定数と地球の質量の積で与えられる．$\boldsymbol{u}$ は衛星に働く推力である．

主衛星の軌道を半径 R_0 の円軌道とする．その近傍の従衛星の相対運動を考えるために，主衛星の重心を原点とする回転座標系 $o - \{\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}\}$ を考える．従衛星の相対位置ベクトルを $\boldsymbol{r} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}$ とすると，運動方程式 (1) より

$$\begin{aligned}
\ddot{x} &= 2n\dot{y} + n^2(R_0 + x) - \frac{\mu}{R^3}(R_0 + x) + u_x \\
\ddot{y} &= -2n\dot{x} + n^2 y - \frac{\mu}{R^3} y + u_y \\
\ddot{z} &= -\frac{\mu}{R^3} z + u_z
\end{aligned} \tag{2}$$

が得られる [1, 2, 3]．ここで $R = [(R_0 + x)^2 + y^2 + z^2]^{1/2}$ である．この方程式を原点 $x = y = z = 0$ で線形化すると

$$\begin{aligned}
\ddot{x} - 2n\dot{y} - 3n^2 x &= u_x \\
\ddot{y} + 2n\dot{x} &= u_y \\
\ddot{z} + n^2 z &= u_z
\end{aligned} \tag{3}$$

が得られる．この方程式は Hill-Clohessy-Wiltshire (HCW) 方程式とよばれる．
$\boldsymbol{u} = 0$，初期値を $[x_0\ y_0\ \dot{x}_0\ \dot{y}_0]^T$ とするとこの方程式の解は

$$\begin{aligned}
x(t) &= 4x_0 + 2\dot{y}_0/n - (3x_0 + 2\dot{y}_0/n)\cos nt + (\dot{x}_0/n)\sin nt \\
y(t) &= y_0 - 2\dot{x}_0/n + (2\dot{x}_0/n)\cos nt + (6x_0 + 4\dot{y}_0/n)\sin nt \\
&\quad - (6nx_0 + 3\dot{y}_0)t \\
\dot{x}(t) &= \dot{x}_0 \cos nt + (3nx_0 + 2\dot{y}_0)\sin nt \\
\dot{y}(t) &= (6nx_0 + 4\dot{y}_0)\cos nt - 2\dot{x}_0 \sin nt - (6nx_0 + 3\dot{y}_0)
\end{aligned} \tag{4}$$

となる．初期値を $[z_0\ \dot{z}_0]^T$ とする面外運動の解は

$$z(t) = z_0 \cos nt + (\dot{z}_0/n)\sin nt \tag{5}$$

$$\dot{z}(t) = -nz_0 \sin nt + \dot{z}_0 \cos nt \tag{6}$$

であり，周期解となる．上の解をパラメータ表現すると

$$\begin{aligned}
x(t) &= 2c + a\cos(nt + \alpha) \\
y(t) &= d - 3nct - 2a\sin(nt + \alpha) \\
z(t) &= b\cos(nt + \beta)
\end{aligned} \tag{7}$$

となる．

面内運動は $c = 2x_0 + \dot{y}_0/n = 0$ のとき周期解となり，この条件を CW 条件という．形状を確認するため，(2) と (3) を軌道半径 R_0 および角速度 n を用いて無次元化する．ここで $n = \sqrt{R_0^3/\mu}$ である．実際 $\tau = t/(1/n)$，$(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) = (x/R_0, y/R_0, y/R_0)$ とおくと，

$$\begin{aligned}
\bar{x}'' - 2\bar{y}' - \bar{x} - 1 &= -\frac{1}{\bar{R}^3}(\bar{x} + 1) + \bar{u}_x \\
\bar{y}'' + 2\bar{x}' - \bar{y} &= -\frac{1}{\bar{R}^3}\bar{y} + \bar{u}_y \\
\bar{z}'' &= -\frac{1}{\bar{R}^3}\bar{z} + \bar{u}_z
\end{aligned} \tag{8}$$

$$\begin{aligned}
\bar{x}'' - 2\bar{y}' - 3\bar{x} &= \bar{u}_x \\
\bar{y}'' + 2\bar{x}' &= \bar{u}_y \\
\bar{z}'' + \bar{z} &= \bar{u}_z
\end{aligned} \tag{9}$$

が得られる [1]．ここで $'$ は τ による微分を表し，$\bar{R} = [(1 + \bar{x})^2 + \bar{y}^2 + \bar{z}^2]^{1/2}$ である．

3　相対軌道の制御

3.1　最適レギュレータによる安定化フィードバック設計

(9) は，軌道の固有パラメータに依存しないのでシミュレーションに便利である．その状態方程式は

$$\bar{\boldsymbol{x}}' = \bar{A}\bar{\boldsymbol{x}} + B\bar{\boldsymbol{u}},\ \bar{\boldsymbol{x}}(0) = \bar{\boldsymbol{x}}_0, \tag{10}$$

となる．ここで

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

である．このシステムを安定化するために最適レギュレータによるリッカチ方程式

$$\bar{A}^T X + X\bar{A} + Q - XBR^{-1}B^T X = 0 \tag{11}$$

によりフィードバック

$$\bar{\boldsymbol{u}} = -R^{-1}B^T X\bar{\boldsymbol{x}} \tag{12}$$

を設計する．以下に周期軌道からのドッキングのシミュレーションを示す．ドッキングは軌道を原点に制御することを意味している．

3.2 ドッキング

3.2.1 周期軌道からのドッキング

図 1 は周期軌道からのドッキングを示した図で，初期軌道，原点へ向かう軌道ともに初期値を $[x_0\ y_0\ \dot{x}_0\ \dot{y}_0\ z_0\ \dot{z}_0]^T = [0.01\ 0\ 0\ -0.02\ 0.01\ 0]^T$ に，重み行列 $Q = qI$ の q の値を 1 に設定してシミュレーションした結果である．

3.2.2 L_1-ノルムと L_2-ノルム

図 2，図 3 は周期軌道からのドッキングにおいて，重み行列を $Q = qI$ とし，$q = 0.5 - 0.005(j-1)$ における j の値を 1 から 100 まで変化させた場合の L_1-ノルムと L_2-ノルムの変化をグラフ化したものである．また，L_1-ノルムはフィードバックの大きさの積分，L_2-ノルムはフィードバックの大きさの二乗積分である．図から，q が減少していくと L_1-ノルムと L_2-ノルムも減少していくことが分かる．また整定時間を 10 周期とした場合，L_1-ノルムと L_2-ノルムが最小となるのは $q = 0.015$ のときで、L_1-ノルムは 0.0113，L_2-ノルムは 0.0037 となる．

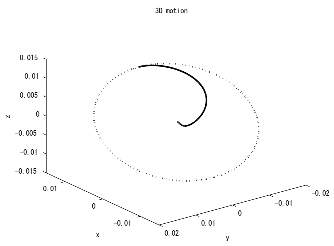

図 1 周期軌道からのドッキング

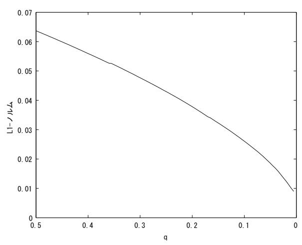

図 2 L_1 ノルム

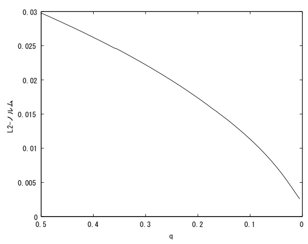

図 3 L_2 ノルム

3.3 非線形 HCW 方程式によるシミュレーション

これまでは線形化した (9) を用いてシミュレーションを行っていたが，ここでは非線形の (8) を用いてシミュレーションを行う．

図 1 と非線形 HCW 方程式におけるドッキングの初期値をそれぞれ元の 10 倍にし，示したものが図 4 と図 5 である．図 4 と図 5 にはほとんど差がないことが分かる．

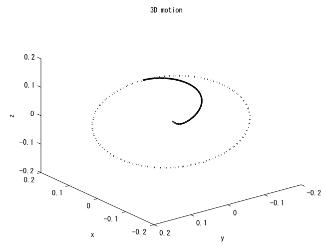

図 4 ドッキング (初期値 10 倍)

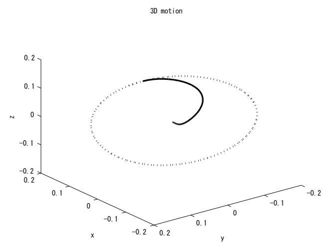

図 5 非線形ドッキング (初期値 10 倍)

4 おわりに

本研究では線形化された HCW 方程式の性質を確認し，最適レギュレータから得られる安定化フィードバックを用いてドッキングのシミュレーションを行い，指定した整定時間の範囲内における L_1 ノルムと L_2 ノルムの最小値を求めた．また非線形 HCW 方程式におけるドッキングのシミュレーションを行い，線形化した HCW 方程式と非線形 HCW 方程式の比較を行った．すると両者にはほとんど差がなく，相対運動を見るときに線形化された HCW 方程式を使っても，誤差はほとんど生じないことが分かった．しかしドッキングは原点への制御であるため誤差が生じにくいと考えられる．よって再構成など，ドッキング以外の場合においても誤差が生じないことを確かめる必要がある．

参考文献

[1] A. Ichikawa: Recent Developments in Formation Flying, Lecture Notes ver.1, 2010.

[2] M. Shibata and A. Ichikawa: Orbital Rendezvous and Flyaround Based on Null controllability with Vanishing Energy, Journal of Guidance, Control, and Dynamics, Vol. 30, No. 4, pp. 934-945, 2007.

[3] B. Wie: Space Vehicle Dynamics and Control, AIAA Education Series, Reston, Virginia, 1998.