# フィードバックによる人工衛星のフォーメーション

2008MI161 中野秀哉　2008MI286 吉田賢司
指導教員：市川　朗

## 1　はじめに

本研究では円軌道上の主衛星とその近傍の従衛星のフォーメーション問題を考察する．その相対運動方程式を原点で線形化した方程式は，Hilll-Clohessy-Wiltshire 方程式とよばれ周期解をもつ．この周期解を用いてフォーメーション形成・再構成問題を定式化する．このときの評価関数は燃料消費を表す総速度変化 ($L_1$-ノルム) とする．これまでの研究で最適インパルスおよび最適パルスの解が知られている．しかし，インパルス・パルス制御では自然界で生じる外乱やモデルの誤差といった変動には対応できない．これは現実で起こり得る問題には適さない．そこで，外乱や誤差について制御ができるフィードバック制御を用いることにする．フィードバックにより最適制御の性能にどれだけ近づくことができるか検討するため HCW 方程式のエネルギー零収束原点可制御性に注目する．これは初期値を原点に移行させるときの入力の二乗積分 ($L_2$-ノルム) を，時間を大きくとることにより 0 に近づけることができるという性質である．これより最適レギュレータ理論による状態フィードバック制御の二乗積分は状態への重みを 0 に近づけることにより任意に小さくすることが可能である．このとき総速度変化も減少することをシミュレーションで確認する．さらにパラメータを含む特異リッカチ方程式より得られる状態フィードバックにも同様の性質があることを確認する．

## 2　相対運動の方程式

半径 $R_0$ の円軌道上の主衛星とその近傍の従衛星の相対運動を考えるため，主衛星の重心を原点とする図 1 の回転座標系 $o-\{\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}\}$ を考える．

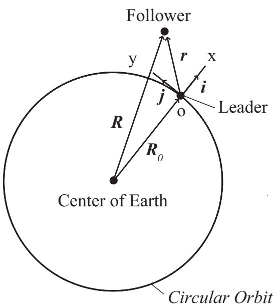



図 1　円軌道上の主衛星

このとき相対位置ベクトルを $\boldsymbol{r}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}$ とすると，運動方程式より

$$\begin{aligned}\ddot{x}&=2n\dot{y}+n^2(R_0+x)-\frac{\mu}{R^3}(R_0+x)+u_x\\ \ddot{y}&=-2n\dot{x}+n^2y-\frac{\mu}{R^3}y+u_y\\ \ddot{z}&=-\frac{\mu}{R^3}z+u_z\end{aligned}\tag{1}$$

が得られる [1, 2, 3]．ここで $\boldsymbol{u}=[u_x\ u_y\ u_z]^T$ は従衛星に働く推力，$R=[(R_0+x)^2+y^2+z^2]^{1/2}$ である．この方程式を原点 $x=y=z=0$ で線形化すると

$$\begin{aligned}\ddot{x}-2n\dot{y}-3n^2x&=u_x\\ \ddot{y}+2n\dot{x}&=u_y\\ \ddot{z}+n^2z&=u_z\end{aligned}\tag{2}$$

が得られる．この方程式は Hill-Clohessy-Wiltshire (HCW) 方程式とよばれる．推力を $\boldsymbol{u}=0$，初期値を $[x_0\ y_0\ \dot{x}_0\ \dot{y}_0]^T$ とする面内運動の解は

$$\begin{aligned}x(t)&=4x_0+2\dot{y}_0/n-(3x_0+2\dot{y}_0/n)\cos nt+(\dot{x}_0/n)\sin nt\\ y(t)&=y_0-2\dot{x}_0/n+(2\dot{x}_0/n)\cos nt+(6x_0+4\dot{y}_0/n)\sin nt\\ &\quad-(6nx_0+3\dot{y}_0)t\\ \dot{x}(t)&=\dot{x}_0\cos nt+(3nx_0+2\dot{y}_0)\sin nt\\ \dot{y}(t)&=(6nx_0+4\dot{y}_0)\cos nt-2\dot{x}_0\sin nt-(6nx_0+3\dot{y}_0)\end{aligned}\tag{3}$$

で与えられる．初期値を $[z_0\ \dot{z}_0]^T$ とする面外運動の解は

$$z(t)=z_0\cos nt+(\dot{z}_0/n)\sin nt\tag{4}$$

$$\dot{z}(t)=-nz_0\sin nt+\dot{z}_0\cos nt\tag{5}$$

であり，周期解となる．上の解をパラメータ表現すると

$$\begin{aligned}x(t)&=2c+a\cos(nt+\alpha)\\ y(t)&=d-3nct-2a\sin(nt+\alpha)\\ z(t)&=b\cos(nt+\beta)\end{aligned}\tag{6}$$

となる．
ここで

$$\begin{aligned}&a=\left[(3x_0+2\dot{y}_0/n)^2+(\dot{x}_0/n)^2\right]^{1/2},\ c=2x_0+\dot{y}_0/n\\ &d=y_0-2\dot{x}_0/n,\ \sin\alpha=-\dot{x}_0/na\\ &\cos\alpha=-(3x_0+2\dot{y}_0/n)/a,\ b=[z_0^2+(\dot{z}_0/n)^2]^{1/2}\\ &\cos\beta=z_0/b,\ \sin\beta=-\dot{z}_0/nb\end{aligned}\tag{7}$$

である．
面内運動は $c=2x_0+\dot{y}_0/n=0$ のとき周期解となり (図 2)，この条件を CW 条件という．
(2) の状態方程式は

$$\dot{\boldsymbol{x}}=A\boldsymbol{x}+B\boldsymbol{u},\ \boldsymbol{x}(0)=\boldsymbol{x}_0\tag{8}$$

ここで

$$A=\begin{bmatrix}0&0&1&0&0&0\\0&0&0&1&0&0\\3n^2&0&0&2n&0&0\\0&0&-2n&0&0&0\\0&0&0&0&0&1\\0&0&0&0&-n^2&0\end{bmatrix},\quad B=\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&0\\1&0&0\\0&1&0\\0&0&0\\0&0&1\end{bmatrix}$$

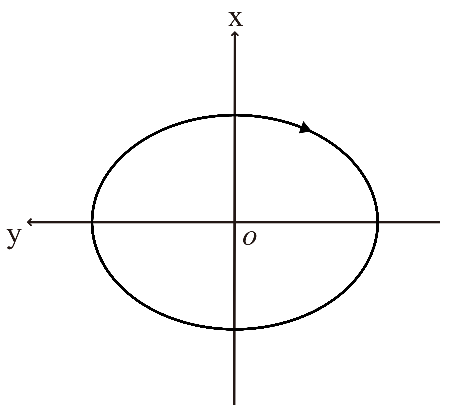



図 2 楕円軌道 ($c = 0$)

パラメータ $(a, c, d, \alpha; b, \beta)$ により表される (8) の解を $\gamma^H = (a, c, d, \alpha; b, \beta)$ と表す．$c = 0$ のときこの解は周期軌道となり $\gamma^H = (a, d; b)$ と表す．フィードバック制御によるフォーメーション形成問題とは，(8) の解を与えられた周期軌道 $\gamma_f^H = (a_f, d_f; b_f)$ に漸近的に追従させることである．このときの評価関数は，制御に使う推力の絶対積分であり，これは消費燃料に比例する．特に従衛星の初期軌道が周期軌道であるときは，フォーメーション再構成問題となる [1]．文献 [4] では，有限回のインパルス入力により速度を変化させ，最終インパルスのあと (8) の軌道を周期軌道 $\gamma_f^H = (a_f, d_f; b_f)$ に一致させる問題が考察されている．評価関数はインパルスの大きさの総和であり，通称 $\Delta V$ として知られている．面内運動に関しては３インパルスの最適解が得られており，最適制御は $u_y$ のみを用い，その $\Delta V^*$ は

$$\Delta V_i^* = \frac{n}{2}|a_f - a_0| \tag{9}$$

となる [4]．面外運動では，１インパルスの最適解が得られている．同様に一定値入力のパルスによるフォーメーションにおいても，面内運動に関しては３パルスの最適解が得られている．最適制御は $u_y$ のみを用い、その $\Delta V^*$ は

$$\Delta V_p^* = \frac{n^2\tau}{4\sin\frac{n\tau}{2}}|a_f - a_0| \tag{10}$$

となる [5]．ここで $\tau$ はパルス幅である．$\tau \to 0$ とすると $\Delta V_p^*$ はインパルスの $\Delta V_i^*$ に収束する．フィードバックによる制御では，評価関数（総速度変化）が $\Delta V_i^*$ に近い準最適制御を求めることが課題となる．

## 3 フォーメーション問題の解

### 3.1 リッカチ方程式による解

HCW システム (8) に対して目標軌道 $\gamma_f^H = (a_f, d_f; b_f)$ が与えられたとする．このとき軌道上に仮想の衛星をおき，その方程式を

$$\dot{\boldsymbol{x}}_f = A\boldsymbol{x}_f,\ \boldsymbol{x}_f(0) = \boldsymbol{x}_{f0} \tag{11}$$

とおく．このとき軌道の誤差 $\boldsymbol{e} = \boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_f$ は

$$\dot{\boldsymbol{e}} = A\boldsymbol{e} + B\boldsymbol{u},\ \boldsymbol{e}(0) = \boldsymbol{e}_0 \tag{12}$$

となる．目標軌道に追従させるためには (11) を安定化すればよい．安定化フィードバックを最適レギュレータのリッカチ方程式

$$A^TX + XA + Q - XBR^{-1}B^TX = 0 \tag{13}$$

より

$$\boldsymbol{u} = -R^{-1}B^TX\boldsymbol{e} \tag{14}$$

とする．$(A, B)$ が可制御であるので，$(\sqrt{Q}, A)$ が可検出ならば (13) は唯一の半正定解で (14) が安定化フィードバックとなる解をもつ．このフィードバックの性能はその大きさの積分すなわちその $L_1$-ノルムにより評価する．状態フィードバックの $L_1$-ノルムを下げる方法として以下の性質に注目する．

$(A, B)$ およびそれにより定義されるシステム

$$\dot{\boldsymbol{x}} = A\boldsymbol{x} + B\boldsymbol{u}, \boldsymbol{x}(0) = \boldsymbol{x}_0 \tag{15}$$

が以下の条件を満たすときエネルギー零収束原点可制御 (NCVE) であるという [6]：任意の初期値 $x(0) = x_0$ に対して，時間列 $T_N, 0 < T_N \uparrow \infty$ と制御 $u_N \in L_2(0, T_N; R^m)$ が存在して $x(T_N; x_0, u_N) = 0$ かつ

$$\lim_{N\to\infty}\int_0^{T_N}|u_N(t)|^2dt = 0 \tag{16}$$

とできる．この必要十分条件が 2 つ知られている [7]．

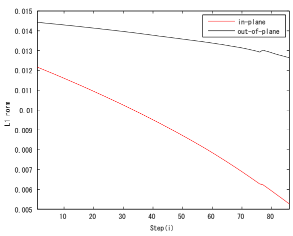
**定理 1** $(A, B)$ が NCVE であるための必要十分条件は
(a) $(A, B)$ が可制御かつ
(b) $X = 0$ が次の特異リッカチ方程式 (SARE) の対称最大解であること．

$$A'X + XA - XBR^{-1}B'X = 0 \tag{17}$$

**定理 2** $(A, B)$ が NCVE であるための必要十分条件は
(a) $(A, B)$ が可制御かつ
(b) $Re(\lambda) \le 0, \forall\ \lambda \in \sigma(A)$
の 2 つである．

HCW システムの固有値は $\{0, 0, \pm in, \pm in\}$ であるから，第 2 の定理により NCVE であることが分かる．第１の定理によりリッカチ方程式 (13) の解は $Q \to 0$ のとき $X \to 0$ となる．最適レギュレータ問題の評価関数を考慮するとフィードバック (14) の二乗積分 ($L_2$-ノルム）は零に収束する．$Q \to 0$ のときフィードバック (14) の $L_1$-ノルムが減少すれば準最適制御の設計が可能となる．この性質を理論的に保証することは困難であるので数値シミュレーションで確認する．

初期軌道から目標軌道まで 10 周期以内で到達する設計にし，その中で $L_1$-ノルムが最小となるフィードバックを設計する．ここでは (13) を $Q = qI$ として $q$ の値を小さくしたときの $L_1$，$L_2$-ノルムの変化と軌道の様子をシミュレーションする．



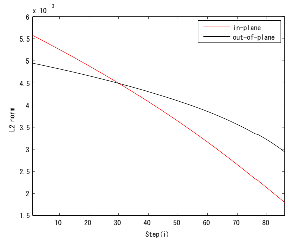
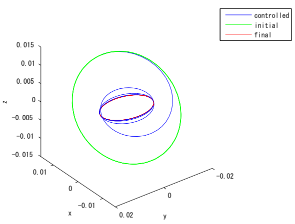




図 3 $L_1$-ノルムの変化　図 4 $L_2$-ノルムの変化

$q$ の値を 0.1 から 0.001 刻みで 0.015 まで減少させたときの面内，面外運動における $L_1$，$L_2$-ノルムの変化は図 3，図 4 となった．$q$ の値が小さくなるほど $L_2$-ノルムが減少し，$L_1$-ノルムも減少していくことが確認できる．

次に，$q$ の値を 0.1，0.05 と小さくしたときの軌道の様子は図 5，図 6 のようになった．このときの $L_1$-ノルムの値は，$q = 0.1$ のとき $L_{1in} = 0.0122$ であり，$q = 0.05$ のとき $L_{1in} = 0.0086$ であった．



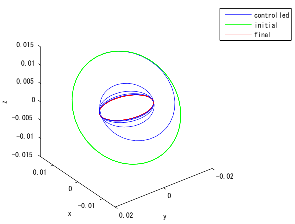




図 5 $q = 0.1$ の場合　図 6 $q = 0.05$ の場合

図 5 と図 6 から $q$ の値を小さくすると目標軌道までの軌跡が増えることによって収束するまでに時間がかかることが分かる．その分 $L_1$-ノルムが小さくなっている．

そして，整定時間を 10 周期としたとき，図 3，図 4 で示した $q = 0.015$ で $L_1$-ノルムが最小となったため，これを準最適な制御とした．そのときの $L_1$-ノルムの値は $L_{1in} = 0.0053$，$L_{1z} = 0.0126$ となり，図 7 のような軌跡になった．

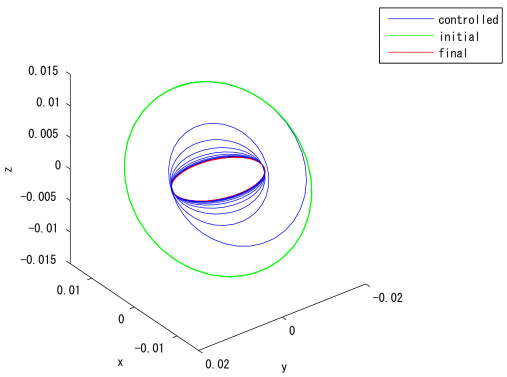



図 7 $q = 0.015$ の場合

$Q = 0.015I$，$R = I$ のとき，解は

$$X = diag(X_1, X_2),$$

$$X_1 = \begin{bmatrix} 4.5723 & -0.2352 & 0.9953 & 2.2352 \\ -0.2352 & 0.0497 & -0.0912 & -0.0818 \\ 0.9953 & -0.0912 & 0.4125 & 0.4156 \\ 2.2352 & -0.0818 & 0.4156 & 1.1581 \end{bmatrix}$$

$$X_2 = \begin{bmatrix} 0.1743 & 0.0075 \\ 0.0075 & 0.1730 \end{bmatrix}.$$

### 3.2 特異リッカチ方程式による解

**定理 3** HCW システム $(A, B)$ に対してリッカチ方程式

$$A^T X + XA - XBR^{-1}B^T X + \gamma X = 0 \tag{18}$$

は唯一の正定かつ (14) が安定化フィードバックとなる解をもつ [8].
実際この式は $X$ を正定とすれば

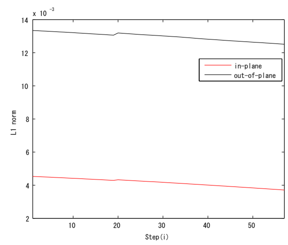
$$X^{-1}(-A^T - \frac{\gamma}{2}I) + (-A - \frac{\gamma}{2}I)X^{-1} + BR^{-1}B^T = 0 \tag{19}$$

と表せる．これはシステム $(-A - \frac{\gamma}{2}I, B)$ の可制御グラミアンであり，$-A - \frac{\gamma}{2}I$ が安定であるので正定解をもつ．$\gamma$ が単調に 0 に減少するとき，その解 $X_\gamma$ は単調に 0 に収束する．このリッカチ方程式は次の評価関数を最小にする問題の解を与える．

$$J(u; x_0) = \int_0^\infty \exp(\gamma t) u(t)^T Ru(t) dt \tag{20}$$

したがって，フィードバック (14) の二乗積分 ($L_2$-ノルム) は急速に零に収束する． このとき，フィードバック (14) の $L_1$-ノルムが減少すると考えられるので準最適制御の設計が可能となる．

ここでも初期軌道から目標軌道まで 10 周期以内で到達する設計問題を考え，その中で $L_1$-ノルムが最小となるフィードバックを設計することにする．(18) を用いて $\gamma$ の値を小さくしたときの $L_1$，$L_2$-ノルムの変化と軌道の様子をシミュレーションする．



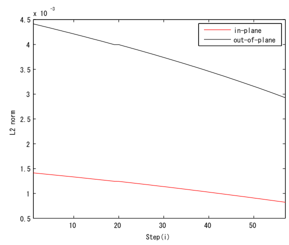
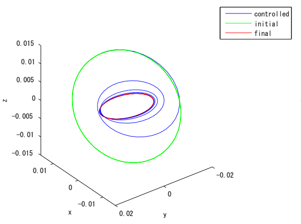




図 8 $L_1$-ノルムの変化　図 9 $L_2$-ノルムの変化

$\gamma$ の値を 0.1 から 0.001 刻みで 0.044 まで減少させたときの面内，面外運動における $L_1$-ノルム，$L_2$-ノルムの変化は図 8，図 9 となった．$\gamma$ の値が小さくなるほど $L_2$-ノ

ルムが減少し，$L_1$-ノルムも減少していくことが確認できる．

次に，$\gamma$ の値を 0.1，0.05 と小さくしたときの軌道の様子は図 10，図 11 のようになった．このときの $L_1$-ノルムの値は，$\gamma = 0.1$ のとき $L_{1in} = 0.0045$ であり，$\gamma = 0.05$ のとき $L_{1in} = 0.0038$ であった．



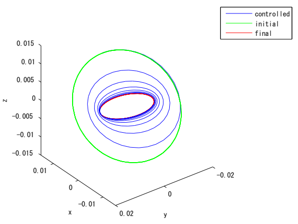


図 10　$\gamma = 0.1$ の場合　　図 11　$\gamma = 0.05$ の場合

$q$ のときと同様に，図 10 と図 11 から $\gamma$ の値を小さくすると目標軌道までの軌跡が増えることによって収束するまでに時間がかかることが分かる．その分 $L_1$-ノルムが小さくなっている．

そして，整定時間を 10 周期としたとき，図 8，図 9 で示した $\gamma = 0.044$ で $L_1$-ノルムが最小となったため，これを準最適な制御とした．そのときの $L_1$-ノルムの値は $L_{1in} = 0.0037$，$L_{1z} = 0.0125$ となり，図 12 のような軌跡になった．

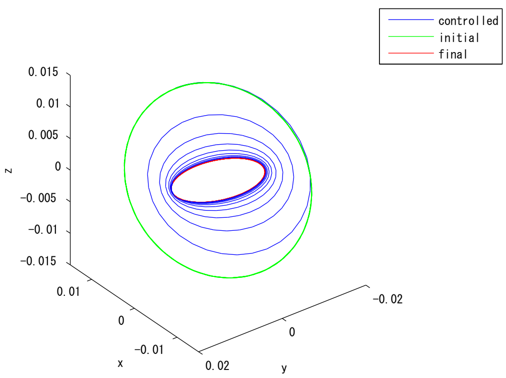



図 12　$\gamma = 0.044$ の場合

$\gamma = 0.044$，$R = I$ のとき，解は

$$X = diag(X_1, X_2),$$

$$X_1 = \begin{bmatrix} 1.0190 & -0.0052 & 0.0377 & 0.5608 \\ -0.0052 & 0.0001 & -0.0003 & -0.0026 \\ 0.0377 & -0.0003 & 0.0372 & 0.0192 \\ 0.5608 & -0.0026 & 0.0192 & 0.3148 \end{bmatrix}$$

$$X_2 = \begin{bmatrix} 0.1767 & 0.0077 \\ 0.0077 & 0.1760 \end{bmatrix}.$$

### 3.3　リッカチ方程式の性能比較

以上のシミュレーション結果から，安定化フィードバックを最適レギュレータのリッカチ方程式 (13) を用いたときの面内運動の $L_1$-ノルム ($L_{1in} = 0.0053$) と，$\gamma$ を含む特異リッカチ方程式 (18) を用いたときの面内運動の $L_1$-ノルム ($L_{1in} = 0.0037$) を比べた場合，無次元化したときのインパルスの最適解

$$\frac{1}{2}|a_f - a_0| = \frac{1}{2}|0.005 - 0.01| = 0.0025$$

に近い値を示した $\gamma$ を含む特異リッカチ方程式のほうが総速度変化 (燃料消費) が少なく優れているという結果となった．

## 4　おわりに

エネルギー零収束原点可制御（NCVE）の必要十分条件を確認すること，2 つのリッカチ方程式を用いたフォーメーションをシミュレーションすること，リッカチ方程式の重みを小さくしたとき $L_1$-ノルム，$L_2$-ノルムが減少することを確認すること，そして，整定時間を 10 周期としたとき $L_1$-ノルムが最小となる準最適なフィードバックを設計することができた．また，2 つのリッカチ方程式のうち $\gamma$ を含む特異リッカチ方程式のほうが $L_1$-ノルムが早く小さくなり，無次元化したときのインパルスの最適解に近いことから，燃料消費がより少ないことが分かった．

## 参考文献


[1] A. Ichikawa:Recent Developments in Formation Flying, Lecture Notes ver.1, 2010.

[2] M. Shibata and A. Ichikawa:Orbital Rendezvous and Flyaround Based on Null controllability with Vanishing Energy, Journal of Guidance, Control, and Dynamics, Vol. 30, No. 4, pp. 934-945, 2007.

[3] B. Wie:Space Vehicle Dynamics and Control, AIAA Education Series, Reston, Virginia, 1998.

[4] Y. Ichimura and A. Ichikawa:Optimal Impulsive Relative Orbit Transfer Along a Circular Orbit, Journal of Guidance, Control, and Dynamics, Vol. 31, No. 4, pp. 1014-1027, 2008.

[5] R. Jifuku, A. Ichikawa and M. Bando:Satellite Formation by Pulse Control Along a Circular Orbit, Journal of Guidance, Control, and Dynamics, Vol. 34, No. 5, pp. 1329-1341, 2011.

[6] A. Ichikawa:Null Controllability with Vanishing Energy for Discrete-Time Systems, Systems & Control Letters, Vol. 57, No. 1, pp. 34-38, 2008.

[7] E. Priola and J. Zabczyk: Null Controllability with Vanishing Energy, SIAM J. Control and Optimization, Vol. 42, pp. 1013-1032, 2003.

[8] B. Zhou, G. Duan and Z. Lin:A Parametric Lyapunov Equation Approach to the Design of Low Gain Feedback, IEEE Transaction on Automatic Control, Vol. 53, No. 6, pp. 1548-1554, 2008.