自然演繹法と正規形定理

2008MI153 長谷康宏
指導教員：佐々木克巳

1　はじめに

[3] によれば、自然演繹とは、実際の証明に近い自然な形の形式的証明体系である。自然演繹の証明図（以下、単に証明図という）には、「必ずしも必要のない論理式」（回り道）が現れるものがある。この論理式が現れない（回り道がない）証明図の存在を保証するのが正規形定理である。回り道のない証明図を作ることによって、効率良く証明図を作成することができる。この意味で正規形定理は有効である。

本研究の目的は、[1],[2],[3] に従って、この正規形定理を理解することである。正規形定理を表現するための概念の正確な定義は [3] では見つけられなかったため、まず、[1],[2] を用いて、その定義を与えた。そして、本研究で扱う正規形定理を正確に述べ、その証明を理解した。その際、証明のうまくいかない部分は除き、うまくいかない例を示した。

本稿では、以下の 2 節で本研究で扱う正規形定理を正確に述べる。3 節でその証明の一部を示す。4 節でうまくいかない例の 1 つを挙げる。

2　正規形定理について

正規形定理とは、どんな証明も回り道のない証明に必ず変形できることを主張する定理である。この節では、“回り道” などこの定理を正確に述べるために必要な概念を定義し、本稿で証明する正規形定理を正確に述べる。[3] を主に用いたが、正確な定義が見つからない概念については、[1] および [2] を参考にして、正確な定義を与えた。

まず、論理式は命題記号と $\wedge, \vee, \to, \neg, \perp$ からふつうの方法で定義する。証明図とそれにともなう概念も一般的な方法で定義する。正確な定義は卒業論文に示したが、本稿では省略する。

次に、“回り道” を定義するため、2 つの証明図 Π, Δ に対し、$\Pi \Rightarrow \Delta$ の形の簡約規則を定義する。5 種類あるが、ここでは、そのうち 2 つを挙げる。

$\wedge$ 簡約規則

$$\dfrac{\dfrac{\begin{matrix}\Pi_1\\ A\end{matrix}\quad\begin{matrix}\Pi_2\\ B\end{matrix}}{A\wedge B}}{A} \Longrightarrow \begin{matrix}\Pi_1\\ A\end{matrix}\qquad\qquad \dfrac{\dfrac{\begin{matrix}\Pi_1\\ A\end{matrix}\quad\begin{matrix}\Pi_2\\ B\end{matrix}}{A\wedge B}}{B} \Longrightarrow \begin{matrix}\Pi_2\\ B\end{matrix}$$

$\vee$ 簡約規則（2 つのうち 1 つのみを示す）

$$\dfrac{\dfrac{\begin{matrix}\Pi_1\\ A\end{matrix}}{A\vee B}\quad\begin{matrix}[A]_i\\ \Pi_2\\ C\end{matrix}\quad\begin{matrix}[B]_j\\ \Pi_2\\ C\end{matrix}}{C} \Longrightarrow \begin{matrix}\Pi_1\\ A\\ \Pi_2\\ C\end{matrix}$$

他に、$\to$ 簡約規則と $\neg$ 簡約規則と $\perp$ 簡約規則がある。$\wedge$ 簡約規則に現れる $A \wedge B$ をこの簡約規則の主論理式という。同様に、$\vee$ 簡約規則、$\to$ 簡約規則、$\neg$ 簡約規則、$\perp$ 簡約規則の主論理式も定義する。論理記号 $\wedge, \vee, \to, \neg$ の 1 つを*とするとき、*簡約規則に対して、Π では、 *の導入に引き続き、*の除去が行われることになる。このとき $\Pi \Rightarrow \Delta$ は Π をより簡単な証明図 Δ に置き換えることを示している。

定義 2.1 Π の部分証明図 Δ が存在して、A が簡約規則 $\Delta \Rightarrow \Delta'$ の主論理式であるとする。このとき、A を Π の回り道という。また、Π における Δ を Δ' に置き換えた図式 Π' も証明図である。このように、Π を Π' に変形することを（簡約規則 $\Delta \Rightarrow \Delta'$ によって）Π を Π' に簡約するという。

定義 2.2 回り道のない証明図を正規形という。

本研究では、$\vee$ 簡約規則と $\perp$ 簡約規則を対象からはずし、次の形の正規形定理の証明を理解した。2 種類の簡約規則を対象としない理由は 4 節で示す。

定理 2.1 Π は次の 3 条件を満たすとする。
(1)　Π の仮定集合が S である
(2)　Π の結論が X である
(3)　$\vee$ 簡約規則でも $\perp$ 簡約規則でも簡約できない
このとき、次を満たす Π' が存在する。
(4)　Π' の仮定集合は S の部分集合である
(5)　Π' の結論は X である
(6)　Π' は正規形である

3　正規形定理の証明

この節では、卒業論文で示した、正規形定理（定理 2.1）の証明の一部を示す。

まず、正規形定理の証明に必要な次の補助定理を確認しておく。その証明は省略する。

補助定理 3.1 Π は $\vee$ 簡約規則でも、$\perp$ 簡約規則でも簡約できない証明図とする。Π を簡約して Δ を得たとき、Δ は $\vee$ 簡約規則でも、$\perp$ 簡約規則でも簡約できない。

次に、正規形定理に必要なランクの定義をする。

定義 3.1 論理式 A に出現する論理記号の出現の数を A の長さと呼ぶ。また、証明図 Π に出現する回り道の論理式の最大長を Π のランクと呼ぶ。回り道の論理式が存在しない証明図のランクは 0 とする。

（正規形定理の証明）

Π のランク n についての帰納法で示す。

$(I)n=0$ のとき：回り道が存在しないので、成り立つ。

$(II)n\geq 0$ のとき、：$n\leq k(k:$ 正の整数$)$ のときに題意が成り立つと仮定する (帰納法の仮定 1)。$n=k+1$ のときを示す。長さ $k+1$ の回り道の数 $\#(\Pi,k+1)$ についての帰納法で題意を示す。

$(i)\#(\Pi,\ k+1)=1$ のとき：次の 2 条件を満たす簡約規則 $\Delta\Rightarrow\Delta^{'}$ が 1 つだけ存在する。

(7)Δ は Π の部分証明図

(8)$\Delta\Rightarrow\Delta^{'}$ の主論理式 (Π の回り道) の長さは $k+1$

この $\Delta\Rightarrow\Delta^{'}$ によって Π が簡約される証明図を $\Pi^{''}$ とおく。$\Delta^{'}$ は $\Pi^{'}$ の部分証明図である。定理はこの簡約規則 $\Delta\Rightarrow\Delta^{''}$ の種類によって場合分けして示される。本稿では、この部分の証明を省略する。

$(ii)\#(\Pi,k+1)\geq 1$ のとき： $\#(\Pi,k+1)\leq l(l:$ 正の整数$)$ のとき題意を満たすと仮定する (帰納法の仮定 2)。$\#(\Pi,k+1)=l+1$ のときを示す。その最も上の最も右の回り道を主論理式とする簡約規則 $\Delta\Rightarrow\Delta^{'}$ で (7)、(8) を満たすものが存在する。(i) と同様に $\Pi^{''}$ を定める。この簡約規則 $\Delta\Rightarrow\Delta^{'}$ の種類によって場合分けして示す。本稿では次の場合のみを示す。

$(ii.1)\Delta\Rightarrow\Delta^{'}$ が $\wedge$ 簡約規則で次の形の場合

$$\dfrac{\dfrac{\begin{matrix}\Pi_1\\A\end{matrix}\quad\begin{matrix}\Pi_2\\B\end{matrix}}{A\wedge B}}{A}\Longrightarrow\begin{matrix}\Pi_1\\A\end{matrix}$$

次の 3 条件を示すことができる。

$(ii.1.1)$ $A\wedge B$ が Π における長さ $k+1$ の回り道のうち、最も上のものである

$(ii.1.2)$ Π_1 と Π_2 には長さ $k+1$ 以上の回り道は存在しない

$(ii.1.3)$ Δ の $A\wedge B$ 以上でない Π の部分の長さ $k+1$ 以上の回り道の数は l 以下である

$(ii.1.1)$ は (8) から、残り 2 つは $(ii.1.1)$, $n=k+1$, $\#(\Pi,k+1)=l+1$ から得られる。$(ii.1.1)$ より

$(ii.1.4)$ A の長さは k 以下である

を得る。また、$(ii.1.2)$ より、

$(ii.1.5)$ Π_1 の長さ $k+1$ 以上の回り道は存在しない

を得る。さらに、$(ii.1.3)$ より、

$(ii.1.6)$ $\Pi^{'}$ の A 以上でない $\Pi^{''}$ の部分の長さ $k+1$ の回り道の数は l 以下である

を得る。$(ii.1.4),(ii.1.5),(ii.1.6)$ より $\Pi^{''}$ のランクは k 以下であり、(4) と (5) も満たす。したがって、(帰納法の仮定 2）により定理を得る。

証明終

なお、上の証明の場合 (ii) において $\Delta\Rightarrow\Delta^{'}$ をその主論理式（回り道）が最も上の最も右のものをとった。しかし、その主論理式を最も上の最も左とすると、必ずしも $\#(\Pi,k+1)$ が小さくできるとは限らない。以下に小さくならない例を示す。

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{[A]\ [A]}{A\wedge A}}{A\to A\wedge A}\quad\dfrac{\dfrac{[A]\ [A\wedge A]}{A\wedge(A\wedge A)}}{A}}{A\wedge A}\Longrightarrow\dfrac{\dfrac{\dfrac{[A]\ [A\wedge A]}{A\wedge(A\wedge A)}}{A}\quad\dfrac{\dfrac{[A]\ [A\wedge A]}{A\wedge(A\wedge A)}}{A}}{A\wedge A}$$

簡約前の回り道は $A\to A\wedge A$ のみであるが、簡約後の回り道は $A\wedge(A\wedge A)$ と $A\wedge(A\wedge A)$ であり、$A\to A\wedge A$ と $A\wedge(A\wedge A)$ の長さは同じなので $\#(\Pi,k+1)$ は 1 つ増えている。

なお、[3] では Δ が最も左上になるようにとっている。

4　うまくいかない簡約規則

3 節で証明した正規形定理は、$\vee$ 簡約規則と $\perp$ 簡約規則を対象としなかった。その理由は、「3 節の証明と同様に $\#\Pi(\Pi,k+1)$ や Π のランクを小さくする」ことができない例があるからである。この節では、その例のうち $\vee$ 簡約規則の例を挙げる。

$\vee$ 簡約規則 $\Delta\Rightarrow\Delta'$ の例：

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{[A]_5}{A\vee B}\quad\dfrac{\dfrac{[A]_1}{A\vee B}}{(A\vee B)\vee A}\quad\dfrac{\dfrac{[B]_2}{A\vee B}}{(A\vee B)\vee A}}{(A\vee B)\vee A}\,1,2\quad[A\vee B]_3\quad\dfrac{[A]_4}{A\vee B}}{A\vee B}\,3,4$$

$\Longrightarrow$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{[A]_5}{A\vee B}}{(A\vee B)\vee A}\quad[A\vee B]_3\quad\dfrac{[A]_4}{A\vee B}}{A\vee B}\,3,4$$

簡約前では回り道は $[A]_5$ の下の「$A\vee B$」のみであるが、簡約後では「$(A\vee B)\vee A$」が回り道なので、証明図のランクが大きくなってしまっている。

5　おわりに

自然演繹法を定義・導入し、回り道のある証明図と回り道のない証明図を比較した。回り道を除去し回り道のない証明図を保証する正規形定理の証明を重点的に研究を進めた。あらゆる場合を加味して証明をしなければならなかったところに非常に苦労した。

参考文献

[1] 小野寛晰：「情報数学セミナー 情報科学における論理」．東京．日本評論社．2008

[2] 林晋：「数理論理学」．東京．コロナ社．2008

[3] 古川康一 向井国照：「コンピュータサイエンス教科書シリーズ 18　数理論理学」．東京．コロナ社．2008