

# 複素積分による多項式の因数分解

2008MI152 村井 智

指導教員：杉浦 洋

## 1 はじめに

本論文では、多項式の因数分解に対して複素関数論を応用したアプローチを試みる。多項式の因数分解は、結局多項式のより低い次数の因子を求めることに帰着する。我々はコーシーの積分定理、コーシーの積分公式および多項式の解と係数の関係を用いる。それによって定められた単純閉曲線の内部に存在する元の多項式の零点全てを零点とする多項式因子を求めるアルゴリズムを示す。この方法を再帰的に用いて多項式の全ての零点を求めることもできる。

## 2 巻き網法

$n$  次多項式

$$f_n(z) = \sum_{k=0}^n a_k z^k$$

の単純閉曲線  $C$  の内部に存在する全ての零点  $\zeta_1, \dots, \zeta_m$  を零点とする  $m$  次多項式

$$p_m(z) = \prod_{j=1}^m (z - \zeta_j) = \sum_{k=0}^m b_k z^k, b_m = 1$$

の係数  $b_k (0 \leq k \leq m-1)$  を求める巻き網法を説明する。単純閉曲線  $C$  はその内部  $f_n(z)$  の零点全てを一網打尽にする巻き網である。さて、積の微分公式より、

$$\frac{f'_n(z)}{f_n(z)} = \sum_{j=1}^n \frac{1}{z - \zeta_j}.$$

したがって、

$$\mu_0 = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f'_n(z)}{f_n(z)} dz = \sum_{j=1}^n \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{1}{z - \zeta_j} dz.$$

$C$  内部で  $1/(z - \zeta_j) (m+1 \leq j \leq n)$  は正則だから、岸、藤本 [1] に沿ったコーシーの積分定理とコーシーの積分公式より  $g(z) = 1$  として、

$$\mu_0 = \sum_{j=1}^m \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{g(z)}{z - \zeta_j} dz = \sum_{j=1}^m g(\zeta_j) = \sum_{j=1}^m 1 = m. \quad (1)$$

これで、 $C$  内の零点の個数  $m$  が得られる。次に (1) と同じ論法で  $g(z) = z^l$  として、

$$\mu_l = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f'_n(z) z^l}{f_n(z)} dz = \sum_{j=1}^m \zeta_j^l \quad (1 \leq l \leq m). \quad (2)$$

これで、零点  $\zeta_1, \dots, \zeta_m$  に関する  $l$  次モーメントが得られる。これに、 $m$  次方程式の解と係数の関係を用いて  $f_n(z)$  の  $m$  次因子  $p_m(z)$  の係数である  $b_k (0 \leq k \leq m-1)$  が得られる。 $p_m(z)$  の定義より、 $b_m = 1$  である。

モーメントの積分 (3) は積分路  $C$  に応じて適切な数値積分公式を用いることとする。

## 3 丸網法

まずは丸網法から考察をしていく。丸網の積分路  $C$  :  $z(t) = c + re^{it} (t: 0 \sim 2\pi)$  は中心  $c$ 、半径  $r$  の円である。ここで、 $k$  次モーメントの計算は、

$$\begin{aligned} \mu_k &= \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f'(z) z^k}{f(z)} dz \\ &= \frac{r}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{f'(c + re^{it})}{f(c + re^{it})} (c + re^{it})^k e^{it} dt \end{aligned} \quad (3)$$

である。これを  $m$  点台形則で近似して、

$$\mu_k \cong \frac{r}{m} \sum_{l=0}^{m-1} g\left(\frac{2\pi l}{m}\right), \quad g(t) = \frac{f'(c + re^{it})}{f(c + re^{it})} (c + re^{it})^k e^{it} \quad (4)$$

を得る。

## 4 角網法

次は、角網法について考察をしていく。角網の積分路  $C$  は長方形の積分路である。長方形の4点を  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$  とし、4辺を、 $C_1: \alpha_1 \sim \alpha_2, C_2: \alpha_2 \sim \alpha_3, C_3: \alpha_3 \sim \alpha_4, C_4: \alpha_4 \sim \alpha_1$  としたとき、 $C = C_1 + C_2 + C_3 + C_4$  である。つまり、

$$\int_C g(z) dz = \int_{C_1} g(z) dz + \int_{C_2} g(z) dz + \int_{C_3} g(z) dz + \int_{C_4} g(z) dz$$

なので、線分  $C_1, C_2, C_3, C_4$  上の積分を計算すればよい。点  $\alpha$  から点  $\beta$  までの線分を  $C$  とするとその線分  $C$  は、

$$C: \gamma + \delta t \quad (t: -1 \sim 1), \quad \gamma = \frac{\alpha + \beta}{2}, \delta = \frac{\beta - \alpha}{2}$$

と書ける。これから、角網の一边に対する積分は、

$$\begin{aligned} Q(\alpha, \beta, k) &= \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f'(z) z^k}{f(z)} dz \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{-1}^1 \frac{f'(\gamma + \delta t)}{f(\gamma + \delta t)} (\gamma + \delta t)^k \delta dt. \end{aligned} \quad (5)$$

右辺の積分を  $n$  点ガウス則で近似すると、

$$\begin{aligned} Q(\alpha, \beta, k) &\cong \frac{\delta}{2\pi i} \sum_{l=1}^n w_l g(x_l) \\ &= \frac{\delta}{2\pi i} \sum_{l=1}^n w_l \frac{f'_n(\gamma + \delta \cdot x_l)}{f_n(\gamma + \delta \cdot x_l)} (\gamma + \delta \cdot x_l)^k. \end{aligned} \quad (6)$$

ここで、標本点  $x_l$  は  $n$  次ルジャンドル多項式の零点、 $w_l$  はその重みで、クリストッフエル数と呼ばれる。

## 5 数値実験

$0, 1, 1+i, i$  を頂点とした正方形の中に乱数で  $n = 100$  個の点  $z_i (1 \leq i \leq 100)$  をとる．  
これらを零点とする多項式を

$$f_n(z) = \prod_{i=1}^{100} (z - z_i)$$

とする．

以下の数値実験において，計算機はFUJITSUのノートパソコン FMV-S8350，CPUはintel Core 2 Duo T7250，2.0GHzである．OSはWindows VistaでMathematica ver.8.0.1.0上でプログラムを作成した．

### 5.1 丸網法での数値実験

100個ある零点を丸網で点  $\alpha = (0.375, 0.425)$  から近い順に三つまで絞り，その三つを零点とする三次多項式  $P_3(z)$  を求め， $P_3(z) = 0$  を解くことにより，この3個の零点を求める．台形則の標本点数は  $m = 100$  とする．中心  $(0.375, 0.425)$ ，半径  $0.1$  の丸網を作る．このとき，

$$\mu_0 \cong 3.00000 + 1.40751 \times 10^{-10}i$$

を得る． $\mu_0$  は3と判定できる(図2)．

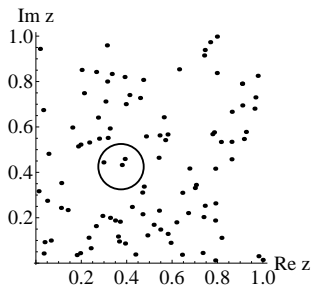


図 1

この三点を零点とする三次多項式

$$P_3(z) = z^3 + b_1 z^2 + b_2 z + b_3$$

を求める．モーメント  $\mu_1, \mu_2, \mu_3$  を台形則で計算し，係数  $b_1, b_2, b_3$  を求めると，

$$\begin{aligned} b_1 &= -1.06725 - 1.33516i \\ b_2 &= -0.216952 + 0.949693i \\ b_3 &= 0.167163 - 0.0796604i \end{aligned}$$

となる．この係数から， $P_3(z) = 0$  を解くと，

$$\begin{aligned} z_1 &= -0.297514 + 0.443887i & (d_1 = 1.31439 \times 10^{-9}) \\ z_2 &= 0.378457 + 0.432371i & (d_2 = 3.78667 \times 10^{-9}) \\ z_3 &= 0.391276 + 0.458902i & (d_3 = 3.04622 \times 10^{-9}) \end{aligned}$$

を得る． $d_1, d_2, d_3$  は真の零点に対する絶対誤差である．

### 5.2 角網法での数値実験

100個ある零点を角網で三つまで切り分け，その三つを零点とする三次多項式  $P_3(z)$  を求め， $P_3(z) = 0$  を解くことにより，この3個の零点を求める．標本点数は一辺あたり  $m = 150$  とする．頂点が  $\alpha_1 = \frac{5}{8} + \frac{1}{2}i$ ， $\alpha_2 = \frac{5}{8} + \frac{5}{8}i$ ， $\alpha_3 = \frac{1}{2} + \frac{5}{8}i$ ， $\alpha_4 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i$  の角網としたとき，

$$\mu_0 \cong 3.00000 - 10^{-16}i$$

を得た．これは， $\mu_0$  が3だと判定できる(図4)．

この三点を零点とする三次多項式

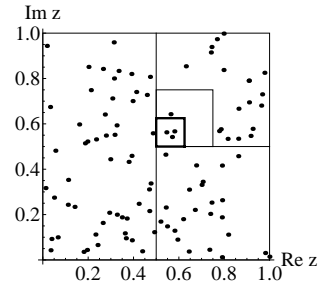


図 2

$$P_3(z) = z^3 + b_1 z^2 + b_2 z + b_3$$

を求める．モーメント  $\mu_1, \mu_2, \mu_3$  をガウス則で計算し，係数  $b_1, b_2, b_3$  を求めると，

$$\begin{aligned} b_1 &= -1.69419 - 1.67157i \\ b_2 &= 0.0252303 + 1.88801i \\ b_3 &= 0.345984 - 0.360056i \end{aligned}$$

となる．この係数から， $P_3(z) = 0$  を解くと，

$$\begin{aligned} z_1 &= 0.544772 + 0.562659i & (d_1 = 3.82001 \times 10^{-13}) \\ z_2 &= 0.569546 + 0.542028i & (d_2 = 5.0427 \times 10^{-13}) \\ z_3 &= 0.579875 + 0.566885i & (d_3 = 4.61336 \times 10^{-13}) \end{aligned}$$

を得る． $d_1, d_2, d_3$  は真の零点に対する絶対誤差である．

## 6 まとめ

複素関数においてコーシーの積分公式を使い，閉曲線  $C$  内の零点のモーメントを求めることによって多項式の因数分解をする巻き網法を考案した．具体的には丸網法と角網法を編み出し，Mathematica を使って数値実験を行った．数値積分法として丸網法では台形則，角網法ではガウス則を使った結果，精度の良い数値実験結果を得ることができた．積分標本点数から丸網法と角網法を比較すると，角網法より丸網法の方が精度が良いことがわかった．今後の課題として，その知見に基づいて巻き網法を拡張改良することと，四次以上の高次因子を求めることである．

## 7 参考文献

岸 正倫，藤本担孝・共著：「複素関数論」学術図書出版社，2008