

# 変動パラメータに相関がある磁気浮上装置の $H_2$ 制御

2008MI117 熊澤舞

指導教員：高見勲

## 1 はじめに

モデリングの際，制御対象のパラメータが不確定であるということは，実際の制御対象を実用化する上で大きな問題である．コントローラの特性を固定した従来の制御方法では，そのような不確定要素を含むシステムに対して必ずしも安定性が保証されていない．この問題を解決するため，制御対象のモデルの変化に合わせ，その変化に対応できるポリトープシステムを用いて制御器を作成する．本研究では，磁気浮上装置に対して，鋼球の位置を変動させ， $H_2$  制御を用いて制御器の作成を行う．

## 2 制御対象

本研究で用いる磁気浮上装置は，上部にあるコイルに電流を流すことで，発生した電磁石引力により，鋼球を浮上させる装置である．

## 3 モデリング

それぞれのパラメータを  $K_m[\text{Nm}^2/\text{A}^2]$ :電磁力定数， $M_b[\text{kg}]$ :鋼球質量， $g[\text{m}/\text{s}^2]$ :重力定数， $F_c[\text{N}]$ :電磁力引力， $x_b[\text{m}]$ :鋼球位置（コイルと鋼球間の距離）， $I_c[\text{A}]$ :電流とする．

鋼球にニュートンの第2法則を用いると，

$$M_b \ddot{x}_b = M_b g - F_c \quad (1)$$

となる．また，電磁石引力  $F_c$  は電流の2乗に比例し，物質間の距離の2乗に反比例することから，

$$F_c = \frac{K_m I_c^2}{2x_b^2} \quad (2)$$

となる．よって式(1)(2)より，

$$\ddot{x}_b = \frac{2M_b g x_b^2 - K_m I_c^2}{2M_b x_b^2} \quad (3)$$

となる．この式は線形的でないため，平衡点  $(x_{b0}, I_{c0})$  の周りで線形化を行う．

$$x_b = x_{b0} + \Delta x, I_c = I_{c0} + \Delta I \quad (4)$$

(ここで， $\Delta x$  と  $\Delta I$  はそれぞれ鋼球位置の微小変位，電流の微小変化である．) この時，状態変数  $x_p(t) = \begin{pmatrix} \Delta x(t) & \Delta \dot{x}(t) \end{pmatrix}^T$ ， $u(t) = \Delta I(t)$  とすると，状態空間表現は下式となる．

$$\dot{x}_p(t) = Ax_p(t) + Bu(t) \quad (5)$$

$$y(t) = Cx_p(t) \quad (6)$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{2g}{x_{b0}} & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{2g}{I_{c0}} \end{pmatrix}, C = (1 \ 0) \quad (7)$$

## 4 制御系設計

### 4.1 ポリトープシステム

$x_{b0}$  の変動範囲は  $5[\text{mm}] \leq x_{b0} \leq 10[\text{mm}]$  であり，式(2)から

$$I_{c0} = \sqrt{\frac{2gM_b}{K_m}} x_{b0} \quad (8)$$

と表すことができる．このことから  $x_{b0}$  と  $I_{c0}$  は相関があり， $x_{b0}$  の変動に合わせて  $I_{c0}$  も変動することが分かる．ここで，

$$a_0 = \frac{1}{x_{min}}, a_1 = \frac{1}{x_{max}} \quad (9)$$

とすると，下式で表すことができる．

$$\frac{1}{I_{min}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{2gM_b}{K_m}}} a_0, \frac{1}{I_{max}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{2gM_b}{K_m}}} a_1 \quad (10)$$

このことから，式(7)の行列  $A$ ，行列  $B$  は次のように表すことができる．

$$A_{min} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2ga_0 & 0 \end{pmatrix}, A_{max} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2ga_1 & 0 \end{pmatrix} \quad (11)$$

$$B_{min} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{2g}{\sqrt{\frac{2gM_b}{K_m}}} a_0 \end{pmatrix}, B_{max} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{2g}{\sqrt{\frac{2gM_b}{K_m}}} a_1 \end{pmatrix} \quad (12)$$

また，ポリトープの与える範囲は以下の図1で表すことができる．行列  $A_{min}$  と行列  $B_{min}$ ，行列  $A_{max}$  と行列  $B_{max}$  には，それぞれ相関があるパラメータを含むので，ポリトープの範囲は四角ではなく直線となる．

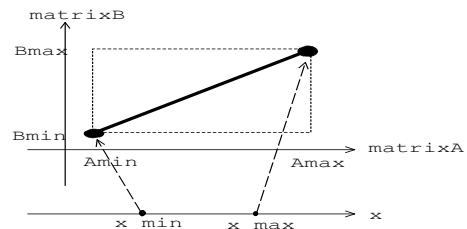


図1 ポリトープの範囲

### 4.2 $H_2$ 制御

本研究で用いる一般化制御対象を図2に示す．図2において， $W_u$ :制御入力を制限する重み， $W_x$ :制御対象の状態量に対する重み， $W_e$ :目標値に追従させるための偏差の積分に対する重みを示している．評価出力  $z_2 = \begin{pmatrix} z_x & z_e & z_u \end{pmatrix}^T$  としたとき， $z_2$  は次式となる．

$$z_2 = C_2 x_e(t) + D_2 u(t) \quad (13)$$

$$C_2 = \begin{pmatrix} W_x & 0 \\ 0 & W_e \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, D_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ W_u \end{pmatrix} \quad (14)$$

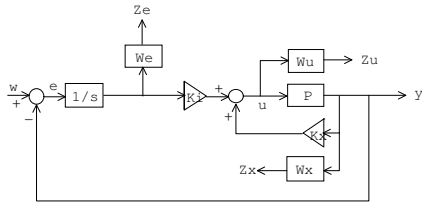


図2 一般化制御対象

ポリトープの範囲を満たし、 $H_2$  ノルムを最小化するような LMI 式は次のようになる。

$$\begin{pmatrix} Z_1 & XC_2^T + Y^T D_2^T \\ C_2 X + D_2 Y & -I \end{pmatrix} < 0 \quad (15)$$

$$\begin{pmatrix} Z_2 & XC_2^T + Y^T D_2^T \\ C_2 X + D_2 Y & -I \end{pmatrix} < 0 \quad (16)$$

$$\begin{pmatrix} t_2^2 & B_r \\ B_r & X \end{pmatrix} > 0 \quad (17)$$

$$Z_1 = A_{e_{min}} X + X A_{e_{min}}^T + Y^T B_{u_{min}}^T + B_{u_{min}} Y \quad (18)$$

$$Z_2 = A_{e_{max}} X + X A_{e_{max}}^T + Y^T B_{u_{max}}^T + B_{u_{max}} Y \quad (19)$$

$$A_{e_{min}} = \begin{pmatrix} A_{min} & 0 \\ -C & 0 \end{pmatrix}, A_{e_{max}} = \begin{pmatrix} A_{max} & 0 \\ -C & 0 \end{pmatrix} \quad (20)$$

$$B_{u_{min}} = \begin{pmatrix} B_{min} \\ 0 \end{pmatrix}, B_{u_{max}} = \begin{pmatrix} B_{max} \\ 0 \end{pmatrix}, B_r = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (21)$$

### 4.3 極領域指定

以下の図3のように、斜線部内に極を配置することにより、制御性能を高める。極領域指定法の LMI 式は、次のようになる[1]。

$$A_{e_{min}} X + X A_{e_{min}}^T + Y^T * B_{u_{min}}^T + B_{u_{min}} Y - 2p_1 X > 0 \quad (22)$$

$$A_{e_{min}} X + X A_{e_{min}}^T + Y^T * B_{u_{min}}^T + B_{u_{min}} Y - 2p_2 X < 0 \quad (23)$$

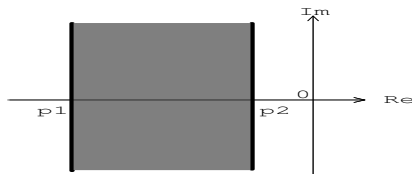


図3 極領域

### 4.4 入力制限

磁気浮上装置は繊細な機械なため、入力を制限する LMI 式(24)(25)を加えてフィードバックゲインを求める。

$$\begin{pmatrix} X & Y \\ Y & I \end{pmatrix} > 0 \quad (24)$$

$$\begin{pmatrix} X & x_0 \\ x_0 & u_{max}^2 \end{pmatrix} > 0 \quad (25)$$

## 5 シミュレーションと実験

それぞれで求めたフィードバックゲインを使い、シミュレーションと実験を行うと次のような結果となった。

### (1) $H_2$ 制御

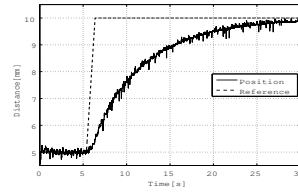


図4 実験結果

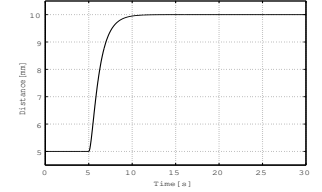


図5 シミュレーション結果

### (2) 極領域指定を含む $H_2$ 制御

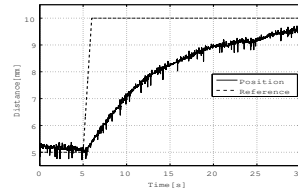


図6 実験結果

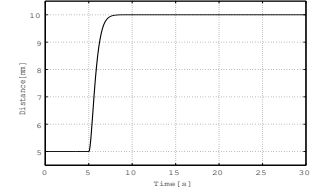


図7 シミュレーション結果

### (3) 入力制限を含む $H_2$ 制御

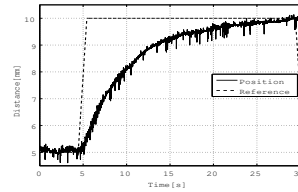


図8 実験結果

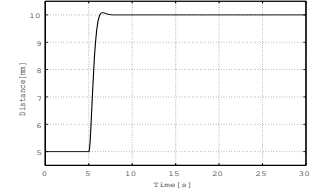


図9 シミュレーション結果

## 6 おわりに

変動パラメータに相関がある場合でも、ポリトープシステムを用いて制御器の作成ができた。この結果、鋼球をまず 5mm に収束させてから 10mm に収束させることができた。さらに、5mm と 10mm だけでなく、 $x_{b0}$  の変動範囲  $5[\text{mm}] \leq x_{b0} \leq 10[\text{mm}]$  を満たすように目標値を設定すれば、1つのフィードバックゲインで追従させることができた。また、極領域指定や入力制限を行うことでより良い応答を得られた。しかし、実験において、立ち上がりが遅くなってしまっている。今後は、パラメータの同定を見直し、実験とシミュレーションの誤差をなくし、重みや極領域を調節し、さらに良い応答を得たい。

## 参考文献

- [1] Mahmoud Chilali and Pascal Gahinet :  $H_\infty$  Design with Pole Placement Constraints: An LMI Approach : IEEE TRANSACTIONS ON AUTOMATIC CONTROL, VOL 41, NO.3, MARCH 1996