代用電荷法による等角写像の計算

2008MI112 小山田 麻祐子

指導教員：杉浦 洋

1　はじめに

代用電荷法は，２次元ラプラス方程式の数値解法として提案された．２次元領域 D におけるラプラス方程式の解である調和関数を，領域の外に配置された２次元点電荷の作る電場と想定し，境界条件に合わせて点電荷の電荷量を調整する．天野は，近似解の共役調和関数が簡単に得られることに注目し，代用電荷法を数値等角写像の計算法に発展させた．

本研究では，任意の単連結領域 D を単位円に写す等角写像を取り上げ，天野の方法を学び，その様々な側面を調べることを目的とする．

2　天野のアルゴリズム

天野は，複素平面の原点を含む有界単連結領域 D から，単位円板への近似等角写像 f_N を

$$f_N(z) = ze^{P_N(z)}$$
$$P_N(z) = -\sum_{i=1}^{n} q_i \log|z-\zeta_i| - i\sum_{i=1}^{n} q_i \arg(1-\frac{z}{\zeta_i})$$

で表現する．$f_N(0)=0$，$f'_N(0)>0$ である．これを天野の近似モデルという．ここで，ζ_i は D の外部にとられ，電荷点と呼ばれる．q_i は，電荷量である．

$$\mathrm{Re}P_N(z) = 0 \ (z \in \partial D) \tag{1}$$

なら，$f_N(z)$ は真の等角写像である．天野は，条件 (1) を離散化した

$$\log|z_j| - \sum_{i=1}^{N} q_i \log|z-\zeta_i| = 0 \ (1 \le j \le N)$$

により，電荷量を q_i を決定する．z_j は ∂D 上にとられ，拘束点と呼ばれる．

以下の数値実験には，Mathematica の倍精度計算を用いた．

3　数値実験 1：円

中心 $0<a<1$，半径 1 の円 C

$$C : (x-a)^2 + y^2 = 1$$

の内部を単位円の内部，原点を原点に写す等角写像 $w=f(z)$ で，$f'(0)>0$ を満たすものを求める．写像関数は，

$$f(z) = \frac{z}{az+1-a^2}$$

であることが知られている．a の値は

$$a = \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}$$

とした．電荷配置は，天野 [1] に従い，領域拡大法を用いた．すなわち，拘束点 z_j，電荷点 $\zeta_j (1 \le j \le N)$ は，

$$z_j = a + e^{i\theta j},$$
$$\zeta_j = a + R_Q e^{i\theta j},$$
$$\theta_j = \frac{2\pi}{N}(j-1)$$

で定義する．円周 C の N 等分点を拘束点とし，中心 a と拘束点を結ぶ線分を $R_Q : (R_Q-1)$ に外分する点を電荷点とする．電荷点は，中心 a，半径 R_Q の円周上に等間隔に配置される．

数値等角写像 $f_N(z)$ の誤差を測定するために，境界上に等間隔点

$$\xi_j = a + e^{\frac{\pi i}{N}j} (0 \le j < 2N)$$

をとる．そして，最大絶対誤差を

$$E_R = \max_{0 \le j < 2N} |f_N(\xi_j) - f(\xi_j)| \tag{2}$$

で計算する．計算結果を表 1 に示す．

計算のパラメータと精度の間には，次のような関係があることがわかる．

1) a が大きいほど精度は低下する (問題が難しくなる)．
2) 電荷数 N の増加に従って精度は向上する．
3) 電荷配置の拡大率 R_Q の増大に従って，精度は向上する．
4) R_Q，N が大きくなると条件数が大きくなる．特に $a=\frac{1}{4}$，$R_Q=4.0$，$N=64$ のときは条件数が 1.48×10^{18} である．このような条件数の元では，線形方程式の解は 1 桁も正しくない可能性がある．それにもかかわらず，$f_N(z)$ の精度は非常に良い．これは謎である．

天野の実験は単精度で行われたため，条件数が 10^7 以上の問題は解けていない．しかし，$a=\frac{1}{4}$，$R_Q=4.0$，$N=16$ で，条件数が 7×10^5 であるにもかかわらず絶対誤差が 2.1×10^{-6} であった．条件数からみると，電荷量の精度はかなり悪いはずなので，これも不思議である．

4　数値実験 2：Cassini の橙形

２点 $(-1,0)$，$(1,0)$ からの距離の積が一定値 a^4 であるような点の軌跡

$$C : (x+1)^2 + y^2(x+-1)^2 + y^2 = a^4$$

は Cassini の橙形と呼ばれる．C の内部を単位円の内部，原点を原点に写す等角写像 $w=f(z)$ で，$f'(0)>0$ を満たすものを求める．写像関数は，

$$f(z) = \frac{az}{\sqrt{a^4-1+z^2}}$$

表 1 円の等角写像

a	R_Q	$N = 16$	$N = 32$ E_R 条件数	$N = 64$
$\frac{1}{4}$	1.2	5.83×10^{-3} 1.42×10^{1}	1.64×10^{-4} 1.23×10^{2}	2.41×10^{-7} 4.56×10^{3}
	1.6	1.32×10^{-4} 1.61×10^{2}	3.94×10^{-8} 1.39×10^{4}	5.88×10^{-15} 5.12×10^{7}
	2.0	1.13×10^{-5} 1.42×10^{3}	1.81×10^{-10} 7.27×10^{5}	2.22×10^{-16} 9.53×10^{10}
	4.0	2.91×10^{-11} 7.27×10^{5}	5.55×10^{-16} 9.53×10^{10}	2.66×10^{-15} 1.48×10^{18}
$\frac{1}{2}$	1.2	1.90×10^{-2} 1.42×10^{1}	6.38×10^{-4} 1.23×10^{2}	9.67×10^{-7} 4.56×10^{3}
	1.6	7.88×10^{-4} 1.61×10^{2}	2.21×10^{-6} 1.39×10^{4}	1.93×10^{-11} 5.12×10^{7}
	2.0	1.91×10^{-6} 1.42×10^{3}	1.46×10^{-11} 7.27×10^{5}	1.11×10^{-15} 9.53×10^{10}
$\frac{3}{4}$	1.2	3.46×10^{-2} 1.42×10^{1}	3.25×10^{-3} 1.23×10^{2}	1.96×10^{-5} 4.56×10^{3}
	1.6	1.82×10^{-2} 1.61×10^{2}	1.12×10^{-3} 1.39×10^{4}	6.39×10^{-6} 5.12×10^{7}

であることが知られている．a の値は

$$a = 2^{1/2}, 2^{1/8}, 2^{1/32}$$

とした．ここでは，凹型領域の例として，$1 < a \le \sqrt{2}$ の範囲を取り上げた．

Cassini の橙形を極座標表示すると

$$(x, y) = r(\cos t, \sin t),$$

$$r = \sqrt{2\cos^2 t - 1 + \sqrt{(2\cos^2 t - 1)^2 + a^4 - 1}}.$$

したがって，領域拡大法による拘束点 z_j，電荷点 $\zeta_j (1 \le j \le N)$ は

$$z_j = r(\theta_j) e^{i\theta_j},$$

$$\zeta_j = R_Q r(\theta_j) e^{i\theta_j},$$

$$\theta_j = \frac{\pi}{2N} j \ (0 \le j < 2N)$$

で定義する．ここでは，誤差を観測する点を

$$\zeta_j = r(t_j) e^{it_j},\ t_j = \frac{\pi}{N} j \ (0 \le j < 2N)$$

とした．最大絶対誤差 E_R の定義は，式 (2) と同様である．

計算のパラメータと精度の間には，次のような関係があることがわかる．

1) a が小さいほど精度は低下する．

2) R_Q を大きくしても精度は向上しない．条件数が大きくなるので，数値計算上は不利である．

3) N を増やしても，円の場合ほど効果が見られない．むしろ，$a = 2^{1/8}$ と $a = 2^{1/32}$ の場合には，精度が低下する場合さえある．

表 2 Cassini の橙形

a	R_Q	$N = 16$	$N = 32$ E_R 条件数	$N = 64$
$2^{1/2}$	1.2	1.59×10^{-2} 1.59×10^{1}	6.26×10^{-4} 1.75×10^{2}	2.38×10^{-6} 2.80×10^{5}
	1.4	5.23×10^{-3} 8.07×10^{1}	2.19×10^{-4} 1.16×10^{4}	3.08×10^{-5} 6.81×10^{9}
	1.6	2.23×10^{-3} 3.53×10^{2}	3.35×10^{-4} 4.27×10^{5}	7.56×10^{-5} 4.03×10^{12}
	1.8	1.22×10^{-3} 1.33×10^{3}	2.91×10^{-4} 6.83×10^{6}	7.55×10^{-5} 5.30×10^{14}
$2^{1/8}$	1.2	2.45×10^{-2} 1.05×10^{1}	7.20×10^{-3} 1.30×10^{2}	6.71×10^{-2} 3.70×10^{8}
	1.4	1.47×10^{-2} 4.14×10^{1}	5.82×10^{-2} 1.61×10^{5}	 1.69×10^{15}
$2^{1/32}$	1.2	2.74×10^{-2} 1.60×10^{1}	1.25×10^{-2} 1.62×10^{2}	6.09×10^{-2} 1.26×10^{8}
	1.4	1.14×10^{-2} 4.48×10^{1}	3.38×10^{-2} 8.86×10^{4}	 1.15×10^{17}

5 まとめ

代用電荷法による等角写像について研究した．まず基礎的な実験として，複素平面の原点に電荷量 -1 の 2 次元点電荷を置き，それが作る複素ポテンシャルを補助電荷を用いて変形する実験を行った．その結果，比較的少ない補助電荷数で，等電位線の形状が多様に変化することがわかった．代用電荷法では，複素ポテンシャルと指数関数の合成関数で単位円板への等角写像を構成する．その際，電位 0 の等電位線が単位円に写像される．

次に，天野の代用電荷法を天野の提案する拘束点，電荷点の配置法である領域拡大法を用いて，Mathematica 上で実現した．天野の数値例を検討するために，原像を円とした問題と，Cassini の橙形とした問題を取り上げ，天野の数値例を 51 例全て追試した．その際，ほとんどの例では我々の結果と天野の結果がよく一致したが，少数，結果が合わない例を発見した．また，天野で計算が悪条件のためにできなかった例が，我々の実験では正常に計算できた．

原因の 1 つは計算精度の差で，天野が単精度計算を行ったのに対し，我々は倍精度計算を行ったからである．このことを詳しく調べるために，線形方程式の条件数を計算してみた．天野の計算は，条件数が 10^7 以上になると，破たんしていることがわかった．しかし，条件数が 10^5 程度なら，天野の計算でも絶対誤差が 10^{-6} 程度の非常に精度のよい等角写像が構成できている．単精度計算は 10^{-6} 程度の丸め誤差を含むので，条件数を考慮すると，これは異常な高精度である．この現象の詳しい調査は，今後の課題である．

6 参考文献

[1] 天野要：代用電荷法に基づく等角写像の数値計算法．情報処理学会論文誌，vol.28，No7，pp.697-704，1987.

[2] 小寺平治：複素解析．共立出版株式会社，2010.

[3] 山口昭男：岩波 数学辞典 第 4 版．岩波書店，2007.