人工衛星の軌道と相対軌道

2008MI103 川瀬　勇　2008MI107 小林　愛
指導教員：市川　朗

1　はじめに

現在地球を周回する人工衛星の数は3000個といわれており，その軌道の大きさ，周期，軌道と赤道面との傾斜角は様々である．また，軌道は，楕円(円)軌道，放物線軌道，双曲線軌道のいわゆる円錐曲線に限られることが知られている．本研究では地球の重力を受ける人工衛星のニュートンの運動方程式より，軌道が平面内に拘束されること，円錐曲線になること，エネルギー保存の法則が成立することを導出する．地球の中心を原点とする極座標による運動方程式を用いて，人工衛星の軌道を描くシミュレーションを行う．さらに，種々の人工衛星のミッション，軌道長半径，周期，離心率，軌道傾斜角，軌道の特徴の調査を行う．また，衛星のフォーメーションに必要な軌道上の主衛星とその近傍の従衛星の相対運動の方程式およびその周期解を導出する．

2　人工衛星の運動方程式

ニュートンの運動方程式を衛星の質量で割ると方程式

$$\ddot{\boldsymbol{R}} + \frac{\mu}{R^3}\boldsymbol{R} = 0 \tag{1}$$

が得られる [2, 4]．ここで，$\boldsymbol{R}$ は，地球中心から衛星への位置ベクトル，$R = |\boldsymbol{R}|$, μ は地球の重力定数であり，万有引力定数と地球の質量の積で与えられる．(1) と $\dot{\boldsymbol{R}}$ との内積をとると，エネルギー保存則

$$\frac{v^2}{2} - \frac{\mu}{R} = \mathcal{E},\ v = |\dot{\boldsymbol{R}}| \tag{2}$$

が得られる．$\boldsymbol{R}$ と (1) のベクトル積をとると角運動量保存則

$$\boldsymbol{R} \times \ddot{\boldsymbol{R}} + \boldsymbol{R} \times \frac{\mu}{R^3}\boldsymbol{R} = 0 \tag{3}$$

ここから

$$\boldsymbol{h} \equiv \boldsymbol{R} \times \dot{\boldsymbol{R}} = 一定 \tag{4}$$

が得られる．この式は位置ベクトルと速度ベクトルからなる面が一定な角運動量ベクトルと直交することを表し，人工衛星の軌道はこの平面 (軌道面) に拘束される．さらに，(1) と $\boldsymbol{h}$ のベクトル積をとると

$$\dot{\boldsymbol{R}} \times \boldsymbol{h} - \frac{\mu}{R}\boldsymbol{R} = \mu\boldsymbol{e} = 一定. \tag{5}$$

が得られる．ここで $\boldsymbol{e}$ は離心ベクトルである．$\boldsymbol{R}$ と (5) の内積をとると

$$\boldsymbol{R}\cdot(\boldsymbol{R} \times \boldsymbol{h}) = \boldsymbol{h}\cdot(\boldsymbol{R} \times \dot{\boldsymbol{R}}) = h^2 \tag{6}$$

$$R = \frac{h^2/\mu}{1 + e\cos\theta}, \tag{7}$$

が得られる．θ は $\boldsymbol{R}$ と $\boldsymbol{e}$ のなす角である．これは極座標による円錐曲線を表している．$0 < e < 1$ のとき楕円，特に $e = 0$ のとき円，$e = 1$ で放物線，$e > 1$ のとき双曲線軌道となる．楕円軌道の場合，動径 R が単位時間に覆う面積 (面積速度) は $\frac{1}{2}R^2\dot{\theta} = \frac{1}{2}h$ であり，一定となる．これはケプラーの第2法則として知られている．この法則から楕円軌道の周期が計算できて，$T = 2\pi\sqrt{a^3/\mu}$ となる．ここで a は長軸半径 (2焦点から楕円上の点までの距離の和の $\frac{1}{2}$) である．すなわち，周期は軌道の長半径によって決まる．(2) の定数 $\mathcal{E}$ は楕円の場合，(2) と (4) より $\mathcal{E} = -\frac{\mu}{2a} < 0$ となる．放物線軌道では $\mathcal{E} = 0$, 双曲線軌道では $\mathcal{E} = \frac{\mu}{2a} > 0$ となる．半径 R_c の円軌道上の衛星の速度を計算すると，(2) より $v_c = \sqrt{\mu/R_c}$ となる．地表 ($R_c = R_e$) でこの速度を計算すると $v_c = \sqrt{\mu/R_e} = 7.91$[km/s] となり，第一宇宙速度という．(2) で $a \to \infty$ とすると $v_c = \sqrt{2\mu/R_e} = 11.2$[km/s] となり地球の重力圏から脱出する速度を与える．これは第二宇宙速度という．

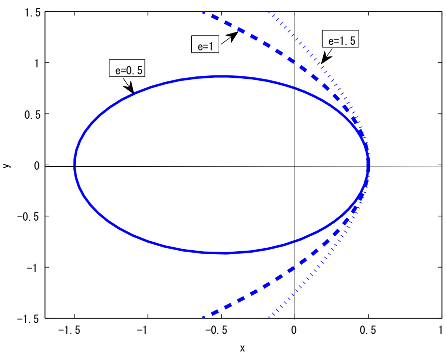

図 1　離心率を変えた時の衛星の軌道

次に運動方程式を数値的に解くことにより軌道が実際円錐曲線になることを確認する．

3　軌道の微分方程式

衛星の軌跡を求めるために R と θ の微分方程式を導く．そのため地球の重心を原点とし，衛星とともに回転する座標系 $\{\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}\}$ を導入する．$\boldsymbol{i}$ は動径方向の単位ベクトル，$\boldsymbol{j}$ は進行方向の単位ベクトルとし，$\boldsymbol{k}$ は右手系となるように選ぶ．$\boldsymbol{R} = R\boldsymbol{i}$，角速度ベクトル $\boldsymbol{\omega} = \dot{\theta}\boldsymbol{k}$ により運動方程式は 2 つの微分方程式

$$\begin{aligned} &\ddot{R} - R\dot{\theta}^2 = -\frac{\mu}{R^2}, \\ &R\ddot{\theta} + 2\dot{R}\dot{\theta} = 0. \end{aligned} \tag{8}$$

となる [2, 4]．この方程式に初期値 $R(0)$, $\dot{R}(0)$, $\theta(0)$, $\dot{\theta}(0)$ を与えることにより軌跡が求まるので．シミュレーションで楕円軌道を生成する．ここでは形状を確認するため，(8) を長軸半径 a および平均運動 (楕円軌道上の平均角速度 n) を用いて無次元化する．周期 T を用いて計算すると $n = \sqrt{a^3/\mu}$ となる．このとき (8) は

$$\begin{aligned} &R'' - R(\theta')^2 = -\frac{1}{R^2}, \\ &R\theta'' + 2R'\theta' = 0. \end{aligned} \tag{9}$$

となる．この方程式の解が周期解となるための初期値を (2) を用いて以下のように決定する．初期位置を楕円の近地点（遠地点）とすると初期値は

$$\begin{aligned} &[R(0), R'(0), \theta(0), \theta'(0)] = \\ &[1 \mp e, 0, 0, \sqrt{(e+1)/(1 \mp e)^3 - 1}] \end{aligned} \tag{10}$$

離心率 e が大きくなると近地点までの距離が短くなりその時の角速度は大きくなる．逆に $e = 0$ に近づくと $R(0) \to 1$, $\theta'(0) \to 1$ となり円軌道に近くなる．同様に双曲線軌道となるための近地点での初期値は

$$\begin{aligned} &[R(0), R'(0), \theta(0), \theta'(0)] = \\ &[e - 1, 0, 0, \sqrt{(e+1)/(e-1)^3 + 1}] \end{aligned} \tag{11}$$

放物線軌道の場合は，$v = \sqrt{2/R}$ であり近地点での初期値は

$$[R(0), R'(0), \theta(0), \theta'(0)] = [R(0), 0, 0, \sqrt{2/R(0)}] \tag{12}$$

となる．

表 1　近地点距離と速度

$R(0)$	e	$\theta'(0)$	$\bar{v}(0)$
0.9	0.1	1.2284	1.10556
0.7	0.3	1.9468	1.36276
0.5	0.5	3.4641	1.73205
0.3	0.7	7.9349	2.38047
0.1	0.9	43.589	4.3589
0.1	1	44.7214	4.47214
0.3	1	8.6066	2.58198
0.5	1	4.000	2.000
0.1	1.1	45.8258	4.58258
0.3	1.3	9.2296	2.7688
0.5	1.5	4.4721	2.23605
0.7	1.7	2.8057	1.96399
0.9	1.9	1.9945	1.79505
2	3	0.7071	1.4142
5	6	0.2366	1.183

近地点距離が同じ場合の角速度の相違を表 1 にまとめる．特に $R(0) = 1/2$ のとき楕円軌道では $\theta'(0) = 3.46$，双曲線軌道では $\theta'(0) = 4.47$ となり角速度は 1.29 倍となる．図 2 は運動方程式から得られた方程式に初期値を与え，0 から軌道周期 2 π までの範囲で数値計算をおこなった図である。
そして，e をパラメータとして変化させ，初期値 (10) のもとで (9) を解いたときの軌跡は図 3 に与えられる．このとき、図 3 は離心率の変化による楕円軌道の軌跡を表す。
同様に，e をパラメータとして変化させ，初期値 (11) のもとで (9) を解いたときの軌跡は図 4 に与えられる．このとき図 4 は離心率の変化による双曲線軌道の軌跡を表す。

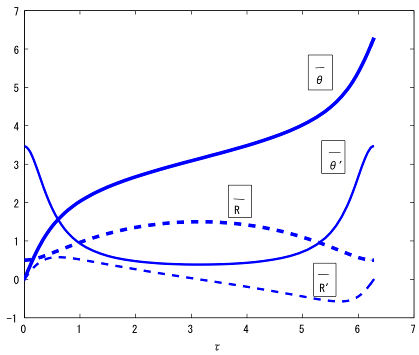

図 2　R, θ とその導関数

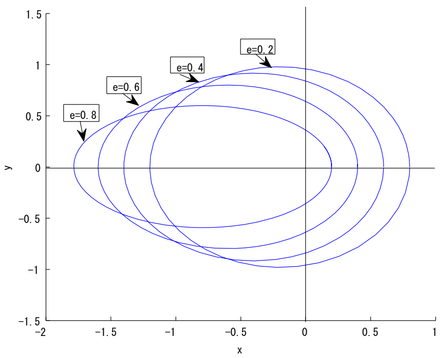

図 3 楕円軌道

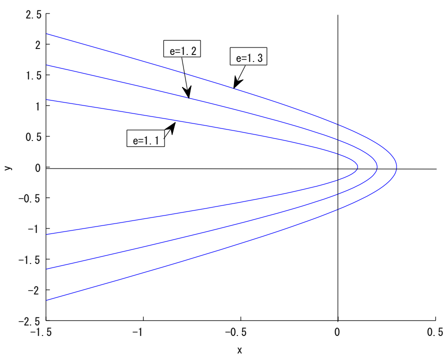

図 4 双曲線軌道

4 種々の人工衛星の軌道とミッション

静止衛星：赤道上空の円軌道で周期が地球の自転と同じ場合，赤道上の観測者から見ると，衛星は静止して見える．軌道の周期から静止衛星の軌道半径を求めると 42000km となる．北半球から真上に向かって衛星を打ち上げると軌道は赤道面に対して傾斜角をもつ．日本から打ち上げた衛星は通常 50 度程度の傾斜角をもつ．GPS 用の衛星は地上から見えなければならない．静止衛星と同じ半径の円軌道の周期は地球の自転と同じであるが，軌道傾斜角がある場合静止衛星にはならない．そのため常時少なくとも 1 機の衛星が見えるためには複数の GPS 衛星が必要となる。2010 年 9 月に打ち上げられた衛星みちびきはこの例であり，みちびきは準天頂衛星とよばれる．軌道傾斜角が 90 度の軌道を極軌道といい，軌道傾斜角が 90 度を超えた場合の軌道を逆行軌道という．この場合，軌道の回転と地球の自転方向は地球と逆方向となる．

国際宇宙ステーション (ISS)：スペースシャトルにより建設が可能となった ISS は 1988 年に建設が始まった．日本のモジュールはきぼうとよばれ，2008 年から 2009 年にかけて建設された．その軌道のデータは以下のとおりである．その軌道は，離心率 0.03 の楕円軌道で円軌道に近い．その周期は 90 分であり，軌道傾斜角は 51.6 である．ISS のミッションは 2016 年までの予定である．現在 ISS との有人飛行はロシアのソユーズのみであり，日本の HTV は物資の補給機の役割を果たしている．

5 相対運動の方程式

半径 R_0 の円軌道上の主衛星とその近傍の従衛星の相対運動を考えるため，主衛星の重心を原点とする図 5 の回転座標系 $o-\{\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}\}$ を考える．このとき

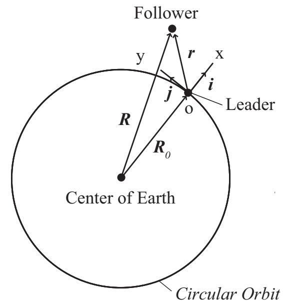

図 5 円軌道上の主衛星

相対位置ベクトルを $\boldsymbol{r}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}$ とすると，運動方程式 (1) より

$$\begin{aligned}\ddot{x}&=2n\dot{y}+n^2(R_0+x)-\frac{\mu}{R^3}(R_0+x),\\ \ddot{y}&=-2n\dot{x}+n^2y-\frac{\mu}{R^3}y,\\ \ddot{z}&=-\frac{\mu}{R^3}z,\end{aligned}\tag{13}$$

が得られる [2, 3, 4]．ここで $R=[(R_0+x)^2+y^2+z^2]^{1/2}$ である．この方程式を原点 $x=y=z=0$ で線形化すると

$$\begin{aligned}\ddot{x}-2n\dot{y}-3n^2x&=0,\\ \ddot{y}+2n\dot{x}&=0,\\ \ddot{z}+n^2z&=0,\end{aligned}\tag{14}$$

が得られる．この方程式は Hill-Clohessy-Wiltshire (HCW) 方程式とよばれる．

楕円軌道上の主衛星とその近傍の従衛星の相対運動は

$$\begin{aligned}&\ddot{x}-2\dot{\theta}\dot{y}-\ddot{\theta}y-\dot{\theta}^2x-\frac{\mu}{R_0^2}=-\frac{\mu}{R^3}(x+R_0),\\ &\ddot{y}+2\dot{\theta}\dot{x}+\ddot{\theta}x-\dot{\theta}^2y=-\frac{\mu}{R^3}y,\\ &\ddot{z}=-\frac{\mu}{R^3}z,\end{aligned}\tag{15}$$

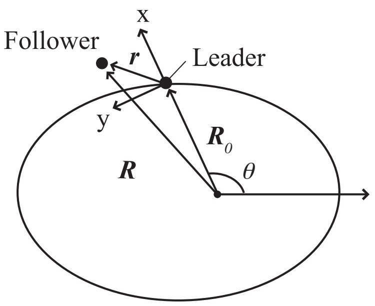

図 6　楕円軌道上の主衛星

となる．(R_0, θ) は主衛星の楕円軌道を表す．この方程式を原点 $x = y = z = 0$ で線形化すると

$$\begin{aligned} &\ddot{x} - 2\dot{\theta}\dot{y} - \ddot{\theta}y - (\dot{\theta}^2 + 2\frac{\mu}{R_0^3})x = 0, \\ &\ddot{y} + 2\dot{\theta}\dot{x} + \ddot{\theta}x - (\dot{\theta}^2 - \frac{\mu}{R_0^3})y = 0, \\ &\ddot{z} + \frac{\mu}{R_0^3}z = 0 \end{aligned} \tag{16}$$

となり，Tschauner-Hempel (TH) 方程式とよばれる [2, 3]．HCW 方程式は，陽に解けて正弦関数で表される．TH 方程式も R_0 および τ をもちいて無次元化したシステムは

$$\begin{aligned} &\bar{x}'' - 2\bar{\theta}'\bar{y}' - \bar{\theta}''\bar{y} - ((\bar{\theta}')^2\bar{x} + \frac{1}{R_0^2})\bar{x} = 0, \\ &\bar{y}'' + 2\bar{\theta}'\bar{x}' + \bar{\theta}''\bar{x} - ((\bar{\theta}')^2 - \frac{1}{R_0^3})\bar{y} = 0, \\ &\bar{z}'' + \frac{1}{R_0^2}\bar{z} = 0 \end{aligned} \tag{17}$$

であり，θ を変数としたシステムの解は以下の周期解をもつことが知られている [1, 5]．

$$\begin{aligned} &\tilde{x}(\theta) = a(1 + e\cos\theta)\cos(\theta + \alpha), \\ &\tilde{y}(\theta) = -a(2 + e\cos\theta)\sin(\theta + \alpha). \end{aligned} \tag{18}$$

これを用いて TH 方程式 (16) の初期値を求めると

$$\begin{aligned} &\bar{x}(\tau_0) = \bar{R}_0(\theta_0)\tilde{x}(\theta_0), \\ &\bar{y}(\tau_0) = \bar{R}_0(\theta_0)\tilde{y}(\theta_0), \\ &\bar{x}'(\tau_0) = [\bar{R}_0'(\theta_0)\tilde{x}(\theta_0) + \bar{R}_0(\theta_0)\tilde{x}'(\theta_0)]\theta'(\tau_0), \\ &\bar{y}'(\tau_0) = [\bar{R}_0'(\theta_0)\tilde{y}(\theta_0) + \bar{R}_0(\theta_0)\tilde{y}'(\theta_0)]\theta'(\tau_0) \end{aligned} \tag{19}$$

となる [1]．

ここで，$\alpha = 0, a = \frac{0.01}{1+e}$ を代入すると，(17) の初期値は

$$\begin{aligned} &\bar{x}(0) = 0.01(1 - e), \\ &\bar{y}(0) = 0, \\ &\bar{x}'(0) = 0, \\ &\bar{y}'(0) = 0.01(-2 - e)\sqrt{(e + 1)/(e - 1)^3} \end{aligned} \tag{20}$$

であり，その軌道は図 7 に与えられる．

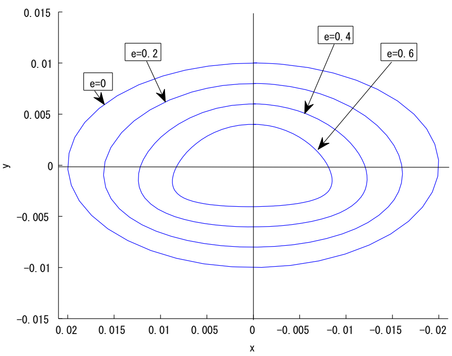

図 7　衛星の相対周期軌道

6　おわりに

本研究の成果は，人工衛星の軌道が円錐曲線になることを導出し，人工衛星の軌道を描くシミュレーションを行うことができたこと，衛星のフォーメーションの研究に必要な相対運動の方程式とその周期解を導出することができたことである。

参考文献

[1] 坂東麻衣，市川朗：Tschauner-Hempel 方程式の周期軌道，第 53 回宇宙科学技術連合講演会，3F11, 京都大学，2009.9.11.

[2] A. Ichikawa: Recent Developments in Formation Flying, Lecture Notes ver.1, 2010.

[3] M. Shibata and A. Ichikawa: Orbital Rendezvous and Flyaround Based on Null controllability with Vanishing Energy, Journal of Guidance, Control, and Dynamics, Vol. 30, No. 4, pp. 934-945, 2007.

[4] B. Wie: Space Vehicle Dynamics and Control, AIAA Education Series, Reston, Virginia, 1998.

[5] K. Yamanaka and F. Ankersen: New State Transition Matrix for Relative Motion on an Arbitrary Elliptical Orbit, Journal of Guidance, Control, and Dynamics, Vol. 25, No. 1, pp. 60-66, 2002.