長方形領域における2次元適応型積分則

2008MI090 片峯由莉香

指導教員：杉浦洋

1　はじめに

2次元の一般的な領域上の積分は，適当な領域分割と変数変換により長方形領域上の積分に帰着できる．この意味で長方形領域上の数値積分則は基本的で重要である．

本研究では二次元長方形領域上の定積分を近似する適応型数値積分則の構成を行う．

適応型積分則とは，要求精度にしたがって長方形領域を小長方形領域に分割し，各小長方形領域に同じ基本公式を用いる計算法である．分割が細かくなればなるほど精度はよくなる．その際，積分誤差の小さい部分は粗く分割し，積分誤差の大きい部分は細かく分割することで，一様均等な分割法と同じ精度が，より少ない分割数で達成できる．

積分領域の三角形分割については牧 [2]，古田 [3]，西田 [4]，嶋出 [5] にわたって研究してきた．その成果を本研究でも長方形分割において取り入れる．

2　数値積分則の設計

xy-平面上の長方形領域を $D=[a,b]\times[c,d]$ と書く．D 上の関数 f の積分を $Q(D)f=\int_\Delta f(x)dxdy$ と置く．基本長方形領域 $\Delta=[-1,1]\times[-1,1]$ の n 個の標本点 $\boldsymbol{\pi}_1=(\xi_1,\eta_1)$, $\boldsymbol{\pi}_2=(\xi_2,\eta_2)$, $\cdots$, $\boldsymbol{\pi}_n=(\xi_n,\eta_n)\in\Delta$ と重み $\rho_1,\rho_2,\cdots,\rho_n$ による積分公式を

$$I_nf=\sum_{l=1}^{n}\rho_l f(\boldsymbol{\pi}_l)\cong\int_\Delta f(\boldsymbol{x})dxdy \tag{1}$$

と書く．

Δ から一般の長方形領域 D へのアフィン変換 $\boldsymbol{p}=\varphi(\boldsymbol{q})$ による変数変換で

$$Q(D)f=\int_D f(\boldsymbol{p})dxdy=\frac{S}{4}\int_\Delta f(\varphi(\boldsymbol{q}))dtdu. \tag{2}$$

この右辺に積分則 I_n を用いて D 上の積分公式

$$I_n(D)f=\frac{S}{4}\sum_{i=1}^{n}\rho_i f(\varphi(\xi_i,\eta_i))\cong Q(D)f \tag{3}$$

を得る．ここで，S は D の面積である．

[定義 2.1]　任意の s 次式 f で $I_n(D)f=Q(D)f$，かつ $I_n(D)f\neq Q(D)f$ となる $s+1$ 次式 f が存在するとき，積分公式 $I_n(D)$ は次数 s であると言う．//

[定理 1]　積分則 (3) の積分公式 $I_n(D)$ が s 次だとする．被積分関数 f は $s+1$ 回連続微分可能とし，

$$M_D=\max_{\boldsymbol{p}\in D}\sum_{k=0}^{s+1}\left|\frac{f^{(k,\ s+1-k)}(\boldsymbol{p})}{k!(s+1-k)!}\right| \tag{4}$$

とする．また長方形領域 D に外接する円の半径を r とする．このとき，

$$|Q(D)f-I_n(D)f|\leq\left(\frac{1}{4}\parallel I_n\parallel_\triangle+1\right)M_DSr^{s+1}. \tag{5}$$

ここで，$\parallel\cdot\parallel_\triangle$ は領域 $\triangle$ 上の一様ノルムである．//

積分誤差は D の面積 S と半径 r が小さいほど小さくなる．

3　適応型積分則の基本アルゴリズム

$\epsilon>0$ を許容誤差とする適応型積分則 $Q(D,\epsilon)$ は次のような再帰関数で表現できる．

$$\hat{Q}(D,\epsilon)f=\begin{cases} I_n(D)f & (E_n(D)f\leq\epsilon)\\ \hat{Q}(D_1,\frac{\epsilon}{2})+\hat{Q}(D_2,\frac{\epsilon}{2}) & (E_n(D)f>\epsilon)\end{cases}$$

ここで，$E_n(D)f$ は絶対誤差 $|I_n(D)f-Q(D)f|$ の推定公式である．このアルゴリズムでは，与えられた許容誤差 $\epsilon>0$ に対し真の積分値 $Q(D)f$ の近似積分 $I_n(D)f$ を $|I_n(D)f-Q(D)f|\leq\epsilon$ を満たすように計算する．もし，$|I_n(D)f-Q(D)f|>\epsilon$ なら，辺に平行な直線で小長方形領域 D_1,D_2 に2等分し（図1），それぞれに同じ積分則 (3) を用いる．

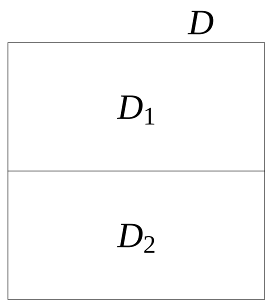

図1　長方形の分割

この再帰的な操作を繰り返し，すべての小領域で割り当てられた許容誤差を満たした時点で近似積分が完了する．

分割は，辺の中点と重心を結ぶ直線による面積等分割を用いる．選ぶ辺により，2つの分割方向が考えられ，効率的な数値積分の構成には分割方向の決定が重要である．

4　適応型積分則における分割方法と誤差評価

ここでは，西田 [4]，嶋出 [5] の分割方法決定法について考察する．彼らは三角形分割について研究してが，彼らのアイデアを長方形分割に翻案して述べる．

4.1　西田の分割方法とその欠点

西田 [4] は，分割後の誤差を補間法により推定する方法を考案した．これにより，最も誤差の小さくなる分割方

向を予想し，その方向に分割する積分法を開発した．この方法は，牧 [2]，古田 [3] と比べ，分割方向の決定が的確であった．しかし，どの方法においても誤差評価関数 $E(D)f$ が誤差を過小評価したため，要求精度に達する前に積分を終了してしまうという失敗が少数ながら観察された．

4.2　嶋出の誤差評価法

嶋出 [5] は，分割方向の決定に関して西田 [4] の方法を採用し，異なる埋め込み型 2 次公式による誤差評価式を４通り作成した．そして，4 通りの評価のなかで最悪のものを最終評価とした．

4.3　我々の方法

＜基本積分則＞標本点集合は要素数 17 の

$$\{\boldsymbol{\pi}_i\} = \left\{\left(\tfrac{2i-3}{3}, \tfrac{2j-3}{3}\right) \middle| 0 \le i \le 3, 0 \le j \le 3\right\} \cup (0,0) \quad (6)$$

とした．この上で単項式

$$\{x^k y^l | 0 \le k \le 3, 0 \le l \le 3\} \cup \{x^4 y^4\} \quad (7)$$

が正確に積分できるように基本積分則 I_{17} を設計した．
＜誤差評価式＞ 2 次埋め込み型標本点は 16 点で基本積分則の標本点集合(6)から $(0,0)$ を除いた部分集合を用いる．単項式の積分を

$$S_{kl} = \iint_{\Delta} x^k y^l dxdy \quad (k \le 0, l \le 0) \quad (8)$$

として，$\kappa = 0, 3$ のとき

$$\tilde{I}_{16}^{<\kappa>}(x^k y^l) = S_{kl}((k,l) \neq (\kappa, 3-\kappa) \cap (k,l) \neq (2,2)) \quad (9)$$

$$\tilde{I}_{16}^{<\kappa>}(x^\kappa y^{3-\kappa}) = \frac{4}{(\kappa+1)(4-\kappa)}((k,l) = (\kappa, 3-\kappa)) \quad (10)$$

$$\tilde{I}_{16}^{<\kappa>}(x^2 y^2) = 0((k,l) = (2,2)) \quad (11)$$

$\kappa = 1, 2$ のとき

$$\tilde{I}_{16}^{<\kappa>}(x^k y^l) = S_{kl} \quad ((k,l) \neq (\kappa, 3-\kappa)) \quad (12)$$

$$\tilde{I}_{16}^{<\kappa>}(x^\kappa y^{3-\kappa}) = \frac{4}{(\kappa+1)(4-\kappa)} \quad ((k,l) = (\kappa, 3-\kappa)) \quad (13)$$

を満たすように 4 つの埋め込み型公式

$$I^{<\kappa>}f = \sum_{i=1}^{16} \tilde{\rho}_i^{<\kappa>} f(\xi_i \eta_i) \quad (0 \le k \le 3) \quad (14)$$

を作成する．これらは 2 次則である．
これを用いて，4 つの誤差評価式

$$E_{16}^{<\kappa>}(D)f = \left|\tilde{I}_{16}^{<\kappa>}(D)f - I_{16}(D)f\right| \quad (0 \le \kappa \le 3) \quad (15)$$

が得られる．そして，許容誤差 $\epsilon > 0$ に対し，$E_{16}(D)f \equiv \max_{0 \le \kappa \le 3} \{E_{16}^{<\kappa>}(D)f\} \le A\epsilon$ のとき，$|I_{16}(D)f - Q(D)f| \le \epsilon$ とみなすこととする．ここで A は安全係数で $A = 15$ とした．

5　数値実験結果

許容誤差 $\varepsilon = 10^{-4}$ で

$$If = \int_{-2}^{2}\int_{-2}^{2} e^{-(x^2+y^2)} dxdy \quad (16)$$

を計算した結果．誤差は $2.40 \times 10^{-5} < \varepsilon$ の積分は成功した．分割数は 475 回，標本点数は 6667 点であった．領域分割の結果を図 2 に示す．なだらかなふもとでは分割数が少なく，急峻な山地で分割数が多くなっており，合理的に分割が行われている．

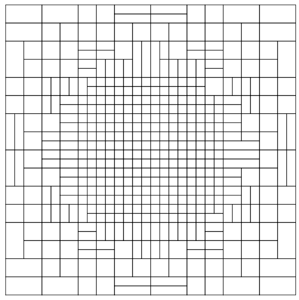

図 2　領域分割結果

6　おわりに

長方形領域における数値積分において，精度の低い長方形領域を 2 つの小長方形領域に分割することを繰り返して，求める精度の近似積分を行う適応型積分則を Mathematica で作成した．牧 [2]，古田 [3]，西田 [4]，嶋出 [5] を参考に今回は三角形領域の積分に関する研究を長方形領域の積分に応用し発展させた．

我々の方法は，分割戦略，誤差評価法共に性能がよく，優秀であった．基本積分則 I_{17} の重みがすべて正にならない，I_{17} は再利用できない標本点 $(0,0)$ を含む，という問題点が残された．それに基づいて完全な再利用可能公式で積分則を構成することが今後の課題である．

7　参考文献

[1] A. Gentz，R. Cools，An Adaptive Numerical Cubature Algorithm for Simplices，ACM Transactions on Mathematical Software，Vol. 29，September 2003，P. 297-308

[2] 牧哲弘，領域の三角分割による 2 次元適応型積分則，南山大学数理情報学部数理学科 2006 年度卒業論文，2007

[3] 古田達也，２次元適応型積分則 (三角形分割の戦略)，南山大学数理情報学部数理学科 2007 年度卒業論文，2008

[4] 西田絵里奈，２次元適応型積分則 (三角形分割の戦略. ２)，南山大学数理情報学部情報システム数理学科 2009 年度卒業論文，2010

[5] 嶋出静香，２次元適応型積分則 (誤差評価法)，南山大学数理情報学部情報システム数理学科 2010 年度卒業論文，2011