

# 小型飛行船の $H_2/H_\infty$ 混合制御

2008MI088 唐澤豊希 2008MI096 桂山成也

指導教員：陳幹

## 1 はじめに

本研究では、情報処理学会・組込みシステム研究会主催の ESS ロボットチャレンジ 2011 に向け小型飛行船の制御を行なう。大会には規定動作として、上昇、直進、旋回の 3 種類が存在する。文献 [1, 2] に書かれた条件を満たすような制御モデルの設計が必要である。出力フィードバックコントローラをそれぞれ独立に作成し、上昇運動、旋回運動に分けてシミュレーションおよび実験を行った。なお本研究において制御手法は、 $H_2/H_\infty$  混合制御を取り扱っている。ESS ロボットチャレンジの競技では制限時間内なら何度もやり直しができるというルールがあり、素早く動作することも必要となってくると考えられる。よって、 $H_\infty$  制御のロバスト安定性に加え、 $H_2$  制御による制御性能向上を図ることは有用であると考えられる。

## 2 制御対象とモデリング

### 2.1 制御対象

実験にはヘリウムが入った楕円型のエンベロープと、上昇用に 1 つ、直進・旋回用に 2 つプロペラが付いた飛行船搭載装置を用いる。

### 2.2 運動方程式の導出

図 1 は上昇運動、図 2 は旋回運動を簡略化したものを行っている。このとき用いた変数や図 1, 図 2 は文献 [3, 4, 5] を参照している。

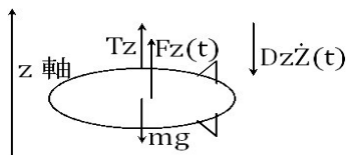


図 1 上昇運動

$$m\ddot{z}(t) = -D_z\dot{z}(t) + F_z(t) + T_z - mg \quad (1)$$

鉛直方向を  $z$  軸とする。図 1, 式 (1) における変数として、推力は  $F_z$ [N]、浮力は  $T_z$ [N]、小型飛行船全体の質量は  $m$ [kg]、重力加速度は  $g$ [m/s<sup>2</sup>]、垂直方向の摩擦係数は  $D_z$ [kg/s]、鉛直方向の高さは  $z(t)$ [m] を用いる。

$T_z = mg$  ならば、重力と浮力は完全につり合うが、現実では不可能である。よって、 $E_z(t) = T_z - mg < 0$  とし、シミュレーションの際に推力  $F_z(t)$ [N] に  $E_z(t)$ [N] の外乱が加わると考える。上昇運動の際には  $-E_z(t)$ [N] の力を推力  $F_z(t)$ [N] に加えることにする。なお  $E_z(t)$ [N] は重さを測ることのできる計測機 (以降計測機とする) を使用して得た飛行船全体の重さ  $M_z$ [kg] を用いて式 (2) のように導出した。

$$E_z(t) = M_z g \quad (2)$$

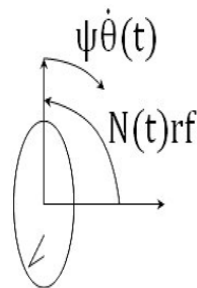


図 2 旋回運動

$$\begin{aligned} J\ddot{\theta}(t) &= -\psi\dot{\theta}(t) + r_f N(t) \\ (N(t) &= F_r(t) - F_l(t)) \end{aligned} \quad (3)$$

図 2, 式 (3) における変数として、慣性モーメントは  $J$ [kg · m<sup>2</sup>]、回転方向の摩擦係数は  $\psi$ [kg · m<sup>2</sup>/s]、重心からプロペラまでの距離は  $r_f$ [m]、水平方向の角度は  $\theta(t)$ [rad]、右プロペラの推力は  $F_r(t)$ [N]、左プロペラの推力は  $F_l(t)$ [N] を用いる。

## 3 推力

今回用いた運動方程式における入力推力 [N] である。この推力 [N] は 0 から 99 の数値 (以降デューティ比と呼ぶ) を飛行船に送信することによりモータに出力される。モータは数値が「+」か「-」かによって、正負が変わるがここでは上昇、前進方向の推力を正方向とする。本論文では実験を通して推力とデューティ比の関係を調べた。図 3 は飛行船搭載装置に付属しているモータの位置を示す。

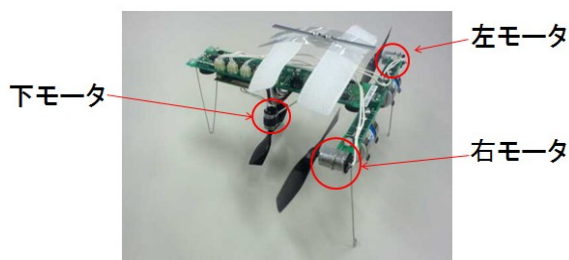


図 3 モータ位置の解説

### 3.1 推力の計測方法

計測機に飛行船搭載装置を設置し、任意の出力で動かしたときに得られる重さをもとに推力を求める。得た結果を図 4, 図 5, 図 6, 図 7 に示す。ただし、得た結果というのは計測機によって計測した重さ [kg] と重力加速度 [kg/s] をかけることにより得た推力である。

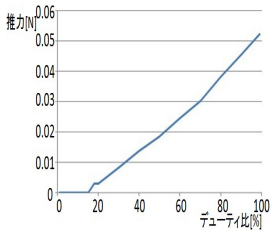


図 4 下モータの推力

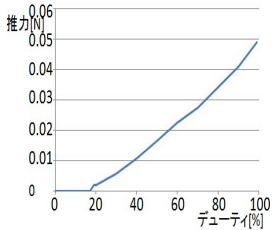


図 6 左モータの推力

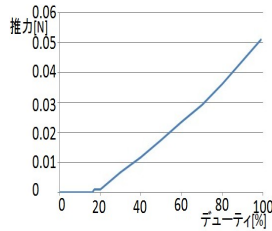


図 5 右モータの推力

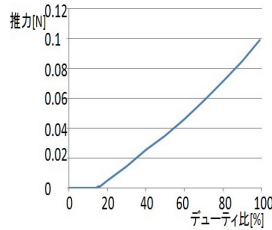


図 7 左右モータの推力

図 4, 図 5, 図 6 は多少誤差があるもののほぼ同じ結果である。それに加えて図 7 の推力は各モータの 2 倍の出力とほぼ等しい。これらの結果より, 3 つのモータは同じ推力が出力できると考えられる。よって各モータの推力を  $\pm 0.051$  [N] の範囲内になるようゲインを設定する。

#### 4 質量

小型飛行船全体の質量は, エンベロープ, 飛行船搭載装置, 重り (クリップや円玉など) の合計の質量に加えエンベロープ内のヘリウムの質量も考慮しなければならない。しかし, ヘリウムの質量は計測機で測ることができないので計算により求める。なお今回エンベロープ内の気体はヘリウムのみとして考える。ヘリウムの質量を 1, 2, 3 の順に行い, 推測する。

1. 小型飛行船を飛ばし, ヘリウムの浮力と重りを釣り合わせ空気中に静止させる。
2. 空中静止したならば, 重りの質量と飛行船の質量がちょうど持ち上がる浮力が働いている。
3. 浮力をアルキメデスの原理 (4) を用いて計算する。

$$T = \rho V g \quad (4)$$

式 (4) における変数は,  $T$  [N] は浮力,  $\rho$  [kg/ℓ] は密度,  $V$  [ℓ] は体積,  $g$  [kg/s<sup>2</sup>] は重力加速度とする。空気中の飛行船は, 飛行船が押しつけている空気の質量に等しい大きさの浮力を受けることから式 (5) を導く。

$$\rho_{air} V g = \rho_{he} V g + m_t g \quad (5)$$

式 (5) における変数は,  $\rho_{air}$  [kg/ℓ] は空気の密度,  $\rho_{he}$  [kg/ℓ] はヘリウムの密度とする。また  $\rho_{air}$ ,  $\rho_{he}$  に関しては文献 [5] と理科年表 [6] を参考に  $\rho_{air} = 1.293$ ,  $\rho_{he} = 0.1785$  とした。浮力によって持ち上げる小型飛行船 (ヘリウムを除く) の質量  $m_t$  [kg] は  $123.2 \times 10^{-3}$  [kg] となるので式 (6) となる。

$$1.293V = 0.1785V + 123.2 \times 10^{-3} \quad (6)$$

式 (6) より  $V = 110.54 \times 10^{-3}$  [ℓ] となる。エンベロープ内にはヘリウムしか入っていないと仮定すると, 式 (7) よりエンベロープ内のヘリウムの質量  $M_{he}$  [kg] は  $19.73 \times 10^{-3}$  [kg] となる。

$$M_{he} = 0.1785V \quad (7)$$

よってヘリウムを除いた小型飛行船の質量  $m_t$  [kg] と先ほど導出したヘリウムの質量  $M_{he}$  [kg] の合計することで, 小型飛行船全体の質量  $m$  [kg] は  $142.93 \times 10^{-3}$  [kg] となる。

#### 5 慣性モーメント

図 8 はエンベロープを横から見たものを簡略化した図である。

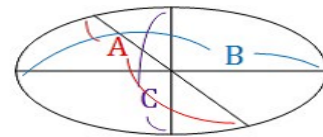


図 8 エンベロープの縦, 横, 奥行き長さ

図 8 において, 奥行きは  $A = 35.5 \times 10^{-2}$  [m], 横は  $B = 107.7 \times 10^{-2}$  [m], 高さは  $C = 52.5 \times 10^{-2}$  [m] である。慣性モーメントに関してはエンベロープと飛行船搭載装置を別々のものとして考えている。これら 2 つを別々で考えた上で足し合わせる。

##### 5.1 エンベロープの $z$ 軸周りの慣性モーメント

中空楕円体の  $z$  軸周りの慣性モーメントを  $I_z$  [kg · m<sup>2</sup>] として, エンベロープの質量  $m_I$  [kg] と半軸  $a = 0.5A$ ,  $b = 0.5B$  を用いて中空楕円体の慣性モーメントを求めたい。しかし中空楕円体の問題を解くには楕円積分という複雑な話が絡んでくるため, 慣性モーメントの式を求めるのが困難である。よって, 半径  $a = 0.5A$  の球殻の  $z$  軸周りの慣性モーメントを  $I_a$  [kg · m<sup>2</sup>], 半径  $b = 0.5B$  の球殻の  $z$  軸周りの慣性モーメントを  $I_b$  [kg · m<sup>2</sup>] とすると,  $I_z$  の範囲は式 (8) のようになる。

$$I_a < I_z < I_b \quad (8)$$

ここで文献 [7] を参考に慣性モーメント  $I_a$ ,  $I_b$  は式 (9), 式 (10) のように導出した。

$$I_a = \frac{2}{3} m_I a^2 = 0.90 \times 10^{-3} \quad (9)$$

$$I_b = \frac{2}{3} m_I b^2 = 8.31 \times 10^{-3} \quad (10)$$

##### 5.2 搭載装置の $z$ 軸周りの慣性モーメント

次に搭載装置の  $z$  軸周りの慣性モーメントを求めたいが, 搭載装置は複雑な形をしているため, 図 9 のように回転体 A, 回転体 B, 回転体 C (電池) の 3 つに分けて考えている。なお搭載装置の丸印は回転軸である。

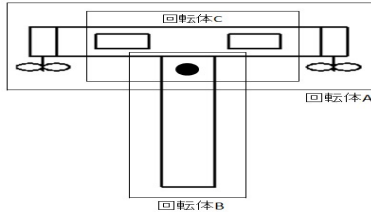


図9 搭載装置

各回転体の慣性モーメントはそれぞれ、回転体 A の慣性モーメントを  $I_A[\text{kg} \cdot \text{m}^2]$ 、回転体 B の慣性モーメントを  $I_B[\text{kg} \cdot \text{m}^2]$ 、回転体 C の慣性モーメントを  $I_C[\text{kg} \cdot \text{m}^2]$  とする。搭載装置全体の慣性モーメント  $I_T[\text{kg} \cdot \text{m}^2]$  は式 (11) となる。

$$I_T = I_A + I_B + I_C = 0.20 \times 10^{-3} \quad (11)$$

### 5.3 飛行船全体の $z$ 軸周りの慣性モーメント

飛行船全体の  $z$  軸周りの慣性モーメントを  $I_Z[\text{kg} \cdot \text{m}^2]$  とする。  $I_Z$  の範囲は式 (8), 式 (9), 式 (10), 式 (11) を用いて式 (12) のように表すことができる。  $I_Z$  は定数に定まっていなないので、この変動を考えた制御を行う。

$$1.10 \times 10^{-3} < I_Z < 8.51 \times 10^{-3} \quad (12)$$

### 5.4 摩擦係数

流体からの抵抗力は斜面からの摩擦力と異なり、物体の速度によって変わる。速度が小さいときは抵抗力は粘性抵抗、速度が速いときは慣性抵抗となる。慣性抵抗は式 (13) となる。

$$F_d = c_d \rho_{air} V^2 S \frac{1}{2} \quad (13)$$

式 (13) において、  $F_d[\text{N}]$  は抵抗力、  $\rho_{air}[\text{kg}/\ell]$  は空気密度、  $S[\text{m}^2]$  は軌道に垂直な断面積、  $V[\text{m}/\text{s}]$  は飛行船と流体の相対速度、  $c_d$  は抵抗係数である。摩擦係数を  $D[\text{kg}/\text{s}]$  とおき、抵抗力  $F_d[\text{N}]$  を  $F_d = DV$  とおき式 (13) に代入すると式 (14) が得られる。

$$D = \frac{1}{2} c_d \rho_{air} V S \quad (14)$$

今回は式 (14) を使い摩擦係数を導出する。速度  $V$  を用いて摩擦係数を求めなければならないので、飛行船の各デューティ比 (上昇:30 から 99, 旋回:20 から 99)[%] における上昇速度、旋回速度を求めた。各デューティ比における 0.1 秒ごとに進んだ距離を用いて速度を測定し、一定の速度に達した場合、それをそのデューティ比における速度  $V$  とする。角速度に関しても同様に求める。各デューティ比における速度を求めた後、式 (13) をもとに各摩擦係数を導出した。それぞれデューティ比によって摩擦係数が変動するのでこれらの誤差を考慮した制御系を設計する。変動の範囲は、上昇摩擦係数が  $0.71 \times 10^{-2}[\text{kg}/\text{s}]$  から  $2.133 \times 10^{-2}[\text{kg}/\text{s}]$ 、旋回摩擦係数が  $0.65 \times 10^{-2}[\text{kg} \cdot \text{m}^2/\text{s}]$  から  $1.949 \times 10^{-2}[\text{kg} \cdot \text{m}^2/\text{s}]$  となった。

## 6 制御系設計

### 6.1 一般化制御対象

本研究における一般化制御対象  $G(s)$  は図 10 とする。図 10 における変数を、相補感度関数に対する重みは  $W_t$ 、制御入力に対する重みは  $W_u$ 、偏差の積分に関する重みは  $W_e$  とする。ここで、  $P, W_e$  の状態空間表現の係数行列をそれぞれ  $A_p, B_p, C_p, D_p, A_e, B_e, C_e, D_e$  で表記する。  $x = [x_p \ x_e]^T$  とし、評価出力  $z_\infty = z_t, z_2 = [z_u \ z_e]$  のとき、  $G(s)$  は式 (16) となる。

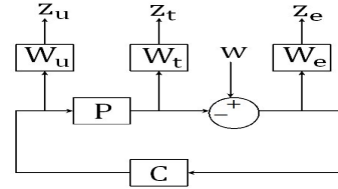


図10 一般化制御対象

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + B_1w + B_2u \\ z_\infty = C_1x + D_{11}w + D_{12}u \\ z_2 = C_2x + D_{21}w + D_{22}u \end{cases} \quad (15)$$

$$G(s) = \begin{bmatrix} A_p & 0 & 0 & B_p \\ -B_e C_p & A_e & B_e & 0 \\ W_t & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & W_u \\ 0 & W_e & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (16)$$

### 6.2 パラメータの変動

本研究において摩擦係数は、速度をもとに導出したのでデューティ比によって変動し、さらに慣性モーメントも定数に定まっていなないので変動する。よって、この誤差を考慮した制御系を設計する。変動範囲はそれぞれ次のようになる。

- 上昇摩擦係数に関しては  $0.71 \times 10^{-2}[\text{kg}/\text{s}]$  から  $2.133 \times 10^{-2}[\text{kg}/\text{s}]$  までの変動に適應できるようにする。ただし  $1.4219 \times 10^{-2}[\text{kg}/\text{s}]$  を基準とする。
- 旋回摩擦係数に関しては  $0.65 \times 10^{-2}[\text{kg} \cdot \text{m}^2/\text{s}]$  から  $1.949 \times 10^{-2}[\text{kg} \cdot \text{m}^2/\text{s}]$  までの変動に適應できるようにする。ただし  $1.2995 \times 10^{-2}[\text{kg} \cdot \text{m}^2/\text{s}]$  を基準とする。
- 慣性モーメントに関しては  $1.10 \times 10^{-3}[\text{kg} \cdot \text{m}^2]$  から  $8.51 \times 10^{-3}[\text{kg} \cdot \text{m}^2]$  までの変動に適應できるようにする。ただし  $4.85 \times 10^{-3}[\text{kg} \cdot \text{m}^2]$  を基準とする。

### 6.3 重みの決定

上昇用プロペラのデューティ比 [%] が変動したときの上昇摩擦係数  $D_z[\text{kg}/\text{s}]$  に対し、最小から最大までを保証できるように相補感度関数重み  $W_t$  を決定する。乗法的不確かさは式 (17) となる。

$$\Delta_m = (\tilde{P}(s) - P(s))P^{-1}(s) \quad (17)$$

式 (17) の  $\Delta_m$  を覆うように重み  $W_t$  を決める. その結果  $W_t = 0.95$  とした.  $\Delta_m$  と  $W_t$  の特異値を図 11 に示す.

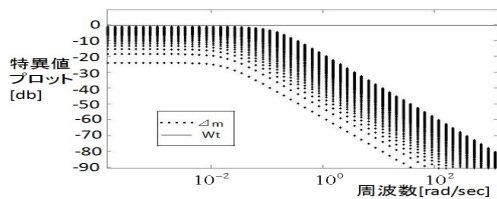


図 11 乗法的な不確かさ  $\Delta_m$  と重み  $W_t$  の特異値

文献 [3] を参考に  $W_e$  は外乱抑制が強く影響される低周波数領域では大きくし, 高周波数領域では小さくするため式 (18) のようにした.

$$W_e = \frac{2.57}{10s+5} \quad (18)$$

$W_u$  はモータの最大推力の  $\pm 0.051$  [N] 以内に抑えるため式 (19) のようにした.

$$W_u = 200 \quad (19)$$

MATLAB の hinfmix というコマンドを用いて計算した結果式 (20) のコントローラを得た.

$$C = \frac{0.03157s^2 + 0.01463s + 0.0002425}{s^3 + 1.831s^2 + 1.477s + 0.4058} \quad (20)$$

このときの  $H_\infty$  ノルムを式 (21),  $H_2$  ノルムを式 (22) に示す.

$$\gamma_\infty = 0.9824 \quad (21)$$

$$\gamma_2 = 5.2183 \quad (22)$$

$\gamma_\infty < 1$  となったのでロバスト安定性の十分条件を満たすものとしている. ロバスト安定性の必要十分条件:小ゲイン定理より,  $\|W_t T_\infty\|_\infty = \|\gamma\|_\infty < 1$  となるならば, このシステムは安定となる. なお  $T_\infty = \frac{PC}{I-PC}$  である. また, 旋回運動のコントローラも同様の手順で求めた.

## 7 実験結果

### 7.1 上昇運動・ホバリングの実験結果

$H_2/H_\infty$  混合制御による上昇の実験結果とシミュレーション結果を図 12 に示す. 目標は競技規定の 2[m] とする.

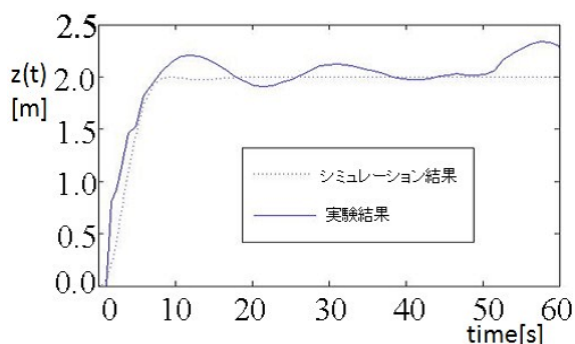


図 12 上昇運動のシミュレーションと実験結果

図 12 において実験結果のグラフは目標の 2[m] 付近に収束し, その後安定して 30 秒間以上ホバリングしている. よって実験は成功したと考えられる.

### 7.2 旋回運動の実験結果

$H_2/H_\infty$  混合制御による旋回運動の実験結果とシミュレーション結果を図 13 に示す. 目標値は 3.14[rad] とする.

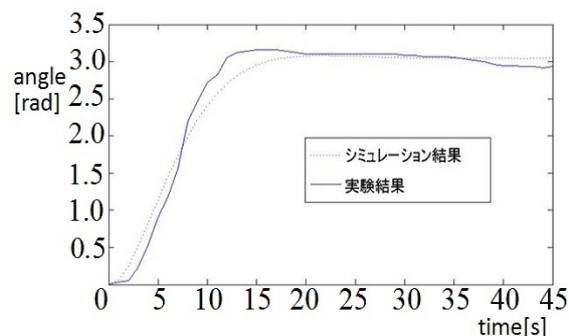


図 13 旋回運動のシミュレーションと実験結果

図 13 において実験結果のグラフは目標の 3.14[rad] 付近に収束している. よって実験は成功したと考えられる.

## 8 おわりに

以上の実験結果より,  $H_2/H_\infty$  混合制御により, ロバスト安定性を保証しつつ, ロバスト制御性能を向上できたと考えられる. 上昇・ホバリング, 旋回は本研究では単独に扱っているため互いのプロペラの干渉を考慮していない. そのためこれらの運動を同時に行うと制御が乱れることがある. 今後の課題は, プロペラ同士の干渉を考慮したモデリングが挙げられる.

## 参考文献

- [1] MDD ロボットチャレンジ 2010 実行委員会:競技仕様書, 情報処理学会, [http://sdslab.sys.wakayama-u.ac.jp/mdd2010/MDD2010\\_regulation.pdf](http://sdslab.sys.wakayama-u.ac.jp/mdd2010/MDD2010_regulation.pdf)(2010)
- [2] ESS ロボットチャレンジ実行委員会:ESS ロボットチャレンジ競技概要, 情報処理学会 組込みシステム研究会, <http://sigemb.jp/rc2011/sub/ESSroboto2011.pdf>(2011)
- [3] 金田知也, 渡邊裕介: $H_\infty$  制御を用いた飛行船の自由航行-MDD ロボットチャレンジ出場に向けて-, 南山大学数理情報学部 2010 年度卒業論文 (2010)
- [4] 山田浩之:PID 制御による多入出力系飛行船の制御モデル設計, 南山大学数理情報学部 2009 年度卒業論文 (2009)
- [5] 石川繁樹:モデル予測制御による飛行船システムの制御系設計に関する研究, [http://www.fl.ctrl.titech.ac.jp/paper/2005/Thesis/M\\_shigeki.pdf](http://www.fl.ctrl.titech.ac.jp/paper/2005/Thesis/M_shigeki.pdf)(2005)
- [6] 国立天文台編:理科年表, 丸善 (株) <http://ebw.eng-book.com/pdfs/ff132d076d0d9f27cbed91eff7ca50a3.pdf>(2003)
- [7] 小畑修二:力学, 東京電機大学出版局 (2000)