長方形領域における再利用可能型公式の設計

2008MI074 伊藤　加奈恵
指導教員：杉浦　洋

1　はじめに

本研究は，長方形領域上の適応型積分則に適した基本積分則の設計を目標とする．積分則の良否は標本点集合で決まる．ここでは完全対称 (FS) でかつ再利用可能 (R) な標本点集合を系統的に生成する方法を目指し，研究を行った．

FS 集合はアトムと呼ぶ極小 FS 集合の和集合である．また R 集合のアトムが再利用可能であるためには，特定のアトム (親アトム) がその R 集合に属する必要がある．これを親子関係と見なし，親子関係グラフを用いて，R 集合を生成する方法を考案した．また Mathematica により座標の分母が 8 以下のアトムに関する親子関係グラフを作図した．

この研究は，1 次元積分に関数 Sugiura-Sakurai[2]，三角領域の積分に関する野田の研究 [1] の発展である．

2　FS(Fully Symmetric：完全対称) 集合

基本領域 $\Delta = [-1, 1] \times [-1, 1]$ をそれ自身に移すアフィン変換 $(x, y) = \varphi(u, v)$ は $\varphi(u, v) = (\pm u, \pm v)$, $(\pm v, \pm u)$ の計 8 個ある．復号 $\pm$ は，変換ごとに自由に選べる．FS 集合は 8 つのアフィン変換で不変な集合である．

点 $\boldsymbol{p} = (x, y) \in \Delta$ を上記 8 個のアフィン変換で移した点全体の集合を

$$\langle \boldsymbol{p} \rangle = \langle x, y \rangle = \{(\pm x, \pm y), (\pm y, \pm x)\}$$

と書き，アトムと呼ぶ．FS 集合はアトムの和集合である．標本点集合が FS 集合である積分公式で，重みが同一アトム内で等しいものを FS 公式と呼ぶ．アトムを単位とするので，同一標本点数の一般の公式と比べ，FS 公式のパラメーター数は少なく，設計も実装も容易となる．

3　再利用性

長方形領域 D=$D[a, b] \times [c, d]$ 上での近似積分 $I_n(D)f$ の精度が悪いときは，x 軸あるいは y 軸と平行な直線で小長方形 D_0 と D_1 に 2 等分し，より精度の高い近似積分

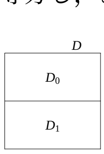

図 1　分割の図

$I_n(D_0)f + I_n(D_1)f \cong Q(D)f$ を得る．この領域分割を D_0, D_1 以下にも再帰的に繰り返し，十分精度の高い近似積分値が得られる．このような領域分割による近似積分法を適用型積分則という．

アトム $\langle \boldsymbol{p} \rangle$ が $I_n(D)$ の標本アトムであるとする．$\langle \boldsymbol{p} \rangle$ の全ての点が $I_n(D_0)$ か $I_n(D_1)$ の標本点にもなっていれば，$\langle \boldsymbol{p} \rangle$ は再利用可能であるという．$I_n(D)$ の全ての標本点が再利用可能であるとき $I_n(D)$ を R(Reusable：再利用可能) 公式と言う．またその標本点集合を R 集合という．R 公式は標本点上で一度計算した関数値が，領域分割の過程で再利用できるため効率的である．

標本アトムの再利用性について次の定理が成り立つ．

定理 1　標本アトム $\langle \xi, \eta \rangle$ が再利用可能であることの必要十分条件は $\langle \xi, \varphi(\eta) \rangle, \langle \eta, \varphi(\xi) \rangle$ がともに標本アトムであることである．ここで

$$\varphi(\eta) = |2\eta - 1| \tag{1}$$

である．//

この依存関係をグラフ的に表現し，$\langle \boldsymbol{p} \rangle \to \langle \boldsymbol{p}_i \rangle (0 \le i \le 2)$ と矢印で結ぶ．また $\langle \boldsymbol{p}_i \rangle$ を $\langle \boldsymbol{p} \rangle$ の親，$\langle \boldsymbol{p} \rangle$ を $\langle \boldsymbol{p}_i \rangle$ の子と呼ぶ．$I_n(D)$ が R 公式であるための必要十分条件は，$I_n(D)$ の標本アトム $\langle \boldsymbol{p} \rangle$ から出る二本の矢印の終点が再び $I_n(D)$ の標本アトムであることである．

4　アトムとギルド

4.1　アトムとギルドの理論

R 集合に含まれるアトムの座標は有理数である．以後，座標が有理数のアトムのみを考える．自然数 m, n に対し，アトムの集合 $S(m, n)$ を，既約分数を座標に持つアトム $\left\langle \frac{k}{m}, \frac{l}{n} \right\rangle$ 全体の集合として定義し (m, n) 系と呼ぶ．アトムの親子関係はアトムの集合にグラフ構造を導入する．これを親子関係グラフと言う．2 つのアトム a, b について，親子関係グラフで双方向に有向パスが存在するとき，a と b は兄弟であるという．特別に a は a の兄弟であると約束する．a の兄弟の集合を $G(a)$ と書きギルドと呼ぶ．

定理 2

$$a \in S(m, n) \Rightarrow P(a) \subset S(m, n) \cup S\left(\frac{m}{2}, n\right) \cup S\left(m, \frac{n}{2}\right).//$$

定理 3　$a \in S(m, n) \Rightarrow G(a) \in S(m, n)$.//

定理 2 より，系はギルドに分解される．例えば，系 $S(5, 5)$ の親子グラフは，図 2 のようになる．このグラフから，この系は以下の 6 つのギルドからなることがわかる．

$$\begin{aligned}
G(\langle \tfrac{1}{5}, \tfrac{1}{5} \rangle) &= \{\langle \tfrac{1}{5}, \tfrac{1}{5} \rangle, \langle \tfrac{1}{5}, \tfrac{3}{5} \rangle, \langle \tfrac{3}{5}, \tfrac{3}{5} \rangle\}, \\
G(\langle \tfrac{1}{5}, \tfrac{2}{5} \rangle) &= \{\langle \tfrac{1}{5}, \tfrac{2}{5} \rangle, \langle \tfrac{2}{5}, \tfrac{3}{5} \rangle\}, \\
G(\langle \tfrac{1}{5}, \tfrac{4}{5} \rangle) &= \{\langle \tfrac{1}{5}, \tfrac{4}{5} \rangle, \langle \tfrac{3}{5}, \tfrac{4}{5} \rangle\}, \\
G(\langle \tfrac{4}{5}, \tfrac{4}{5} \rangle) &= \{\langle \tfrac{4}{5}, \tfrac{4}{5} \rangle\}, \\
G(\langle \tfrac{2}{5}, \tfrac{4}{5} \rangle) &= \{\langle \tfrac{2}{5}, \tfrac{4}{5} \rangle\}, \\
G(\langle \tfrac{2}{5}, \tfrac{2}{5} \rangle) &= \{\langle \tfrac{2}{5}, \tfrac{2}{5} \rangle\}.
\end{aligned}$$

定理 4　A が R 集合でアトム $a \subset A$ なら，$G(a) \subset A$. //

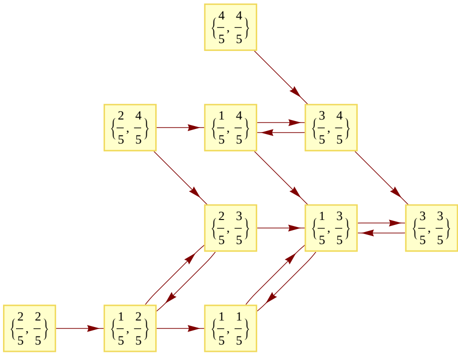

図 2 親子グラフ

4.2 ギルド間の関係

定理 5 $G(a) \neq G(b)$ について，a から b へのパスが存在するなら，b から a へのパスは存在しない．

$G(a) \neq G(b)$ で a から b へのパスが存在するとき，$G(a)$ を $G(b)$ の親ギルド，$G(b)$ は $G(a)$ の子ギルドと言い，$G(a) \to G(b)$ と書く．以下の定理の証明は簡単である．

定理 6 A が R 集合，$G(a) \subset A$ かつ $G(a) \to G(b) \Rightarrow G(b) \subset A$.//

定理 7 $G(a) \Rightarrow G(b), G(a) \subset S(m,n)$ ならば $G(b)$ は $S(m,n), S(\frac{m}{2},n), S(m,\frac{n}{2})$ のいずれかに含まれる．//

図 2 で取り上げた $S(5,5)$ のギルド間の親子関係グラフを図 3 に示す．このグラフで $G(\langle\frac{1}{5},\frac{1}{5}\rangle)$ は親を持たない．このようなギルドを根ギルドと言う．根ギルドは，それ自身 R 集合である．

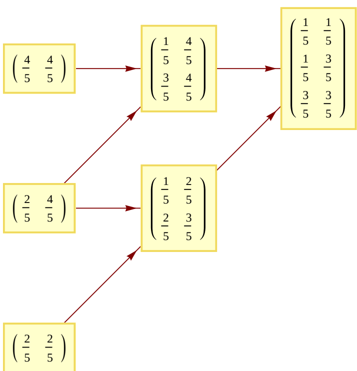

図 3 ギルド間の親子関係グラフ

5 ギルドの親子関係グラフ

5.1 (8,8) 系までのグラフ

座標の分母が 8 以下のすべてのアトムに関する親子関係グラフを，G_8 とする．G_8 の連結成分を city と呼ぶ．ギルドは city の構成要素であり，city はギルドの和集合となる．G_8 は 10 個の city に分かれることがわかった．city におけるギルドの親子関係グラフの例を図 3，図 4 に示す．すべてのグラフは世代順に右から左へ層状に配置されている．一番右の層は一つの根ギルドからなる．その左は根ギルドの子ギルド世代の層，その左は根ギルドの孫ギルドの層である．グラフを観察すると，親子関係は隣同士の層で結ばれる．層を飛び越えた親子関係はないし，同じ層同士の親子関係もない．

6 グラフによる R 集合の構成

親子関係グラフにより，R 集合を系統的に構成することができる．あるギルドから根ギルドに至る最短有向パスの長さが l のとき，そのギルドは第 l 世代であるという．根ギルドは第 0 世代とする．

例として，図 3，図 4 から，第 2 世代までを含む R 集合を構成する．

*step*0．根ギルド $\{\langle\frac{1}{5},\frac{1}{5}\rangle,\langle\frac{1}{5},\frac{3}{5}\rangle,\langle\frac{3}{5},\frac{3}{5}\rangle\}$ と $\{\langle\frac{1}{3},\frac{1}{3}\rangle\}$ を選ぶ．

*step*1．*step*0 で選んだギルドのみを親ギルドとする $\{\langle\frac{1}{3},\frac{2}{3}\rangle\}$ を選ぶ．

*step*2．*step*1 で選んだギルドのみを親ギルドとする $\{\langle\frac{1}{3},\frac{5}{6}\rangle\}$ を選ぶ．

以上で R 集合

$$P = \{\langle\tfrac{1}{5},\tfrac{1}{5}\rangle \cup \langle\tfrac{1}{5},\tfrac{3}{5}\rangle \cup \langle\tfrac{3}{5},\tfrac{3}{5}\rangle \cup \langle\tfrac{1}{3},\tfrac{1}{3}\rangle \cup \langle\tfrac{1}{3},\tfrac{2}{3}\rangle \cup \langle\tfrac{1}{3},\tfrac{5}{6}\rangle\}$$

が作られた．

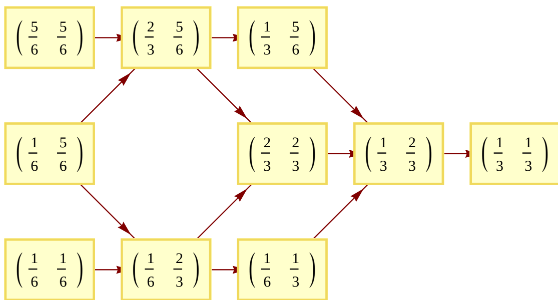

図 4 ギルド間の親子関係グラフ

実際の標本点配置を，図 5 に示す．

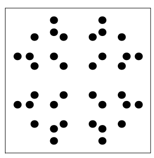

図 5

7 おわりに

R 集合をギルドの和集合として捉え，ギルドの親子関係グラフから任意の R 集合を構成する方法を考えた．

8 参考文献

[1] 野田恭代, 二次元完全対称積分則の設計, 南山大学数理情報学部数理科学科 2006 年度卒業論文 (2007).

[2] H. SUGIURA and T. SAKURAI: J. Comp. Appl. Math., vol.28, no.1-3, pp.367-381(1989).