様相論理と時間論理

2008MI031 服部寛
指導教員：佐々木克巳

1　はじめに

数理論理学を研究していて、数学的なものだけではなく、日常的な思考を論理的に分析しているという様相論理に興味を持った。

本研究の目的は、小野 [1] 第 4 章で紹介されている様相論理の一般的性質と様相論理の 1 つである時間の論理についての理解を深めることである。具体的には、小野 [1] の問に解を与えることによってその理解を深める。

以下の 2、3、4 節は、小野 [1] にしたがって、それぞれ、様相論理、クリプキによるセマンティクス、時間論理を導入する。さらに、3、4 節では、卒業論文で解を与えた問の一部を示す。

2　様相論理

この節では、様相論理を導入する。まず、論理式を定義する。

定義 2.1(様相論理の論理式)
(1) それぞれの命題変数は論理式である。
(2)A,B がともに論理式ならば、$(A\wedge B)$,$(A\vee B)$,$(A\supset B)$,$(\neg A)$,$(\Box A)$ はいずれも論理式である。

また、$\Diamond A$ を $\neg\Box\neg A$ の省略形として用いる。$\Box A$, $\Diamond A$ の直観的な意味は以下のとおりである。

(1)$\Box A\Leftrightarrow$ 必然的に A である
(2)$\Diamond A\Leftrightarrow A$ である可能性がある

定義 2.2(体系 K)　体系 K は古典命題論理の sequent 体系 LK に、さらに $\Box$ に関するつぎの推論規則をつけ加えたものである。

$$\frac{B_1,\cdots,B_m\to A}{\Box B_1,\cdots,\Box B_m\to\Box A}(\Box)$$

推論規則として $(\Box)$ を含むような様相論理を正規な様相論理という。正規な様相論理を定義するために、いくつかの論理式の型 X_1,$\cdots$,X_k に対し、始式として
　$\to X_i\quad(i=1,\cdots,k)$
をつけ加える。このようにして定義される様相論理を K$X_1\cdots X_k$ と表す。また、これらの X_1,$\cdots$,X_k をこの様相論理の公理型という。以下に代表的な公理型を挙げる。
D : $\Box A\supset\Diamond A$
T : $\Box A\supset A$
4 : $\Box A\supset\Box\Box A$
B : $A\supset\Box\Diamond A$
5 : $\Diamond A\supset\Box\Diamond A$

3　クリプキによるセマンティクス

この節では、クリプキによる様相論理のセマンティクスを導入し、小野 [1] の問に解を与える。

定義 3.1(クリプキ・フレーム)　空でない集合 M と M 上の二項関係 R の対 (M,R) をクリプキ・フレームという。M および R をそれぞれこのクリプキ・フレームの可能世界の集合および到達可能関係という。

定義 3.2(クリプキ・モデル)　(M,R) をフレームとし、V を各命題変数に対し $V(p)\subseteq M$ となるような写像とする。このとき、V をフレーム (M,R) 上の付値という。(M,R,V) をクリプキ・モデルという。与えられたクリプキ・モデルに対し、M の要素と論理式の間の二項関係 $\models$ を次のように帰納的に定義する。

(1)$a\models p\Leftrightarrow a\in V(p)$　　(p は命題変数)
(2)$a\models A\wedge B\Leftrightarrow a\models A$ かつ $a\models B$
(3)$a\models A\vee B\Leftrightarrow a\models A$ または $a\models B$
(4)$a\models A\supset B\Leftrightarrow a\models A$ でないか、または $a\models B$
(5)$a\models\neg A\Leftrightarrow a\models A$ でない
(6)$a\models\Box A\Leftrightarrow aRb$ となるすべての b に対し $b\models A$

関係 $\models$ は付値 V から一意的に定まるので、$(M,R,\models)$ もクリプキ・モデルという。また、(5) と (6) より、次の (7) が導かれる。

(7)$a\models\Diamond A\Leftrightarrow aRb$ となるある b に対し $b\models A$

定義 3.3(恒真な論理式)　フレーム (M,R) 上の任意の付値 $\models$ と M の任意の要素 a に対して $a\models A$ となるとき、論理式 A は (M,R) で恒真であるという。クリプキ・モデル $(M,R,\models)$ において、ある $b(\in M)$ に対し $b\not\models A$ となるとき、$(M,R,\models)$ で論理式 A は偽であるという。またある付値 $\models$ に対し、A が $(M,R,\models)$ で偽であるとき、A はフレーム (M,R) で偽であるという。

公理型について到達可能関係との関係を述べる。二項関係 R に対し、R が継続的、対称的、ユークリッド的、推移的であることを次のように定義する。
(1)R が継続的 $\Leftrightarrow$ どの x に対してもある y が存在して xRy
(2)R が対称的 $\Leftrightarrow xRy$ ならば yRx
(3)R がユークリッド的 $\Leftrightarrow xRy$ かつ xRz ならば、yRz
(4)R が推移的 $\Leftrightarrow xRy$ かつ yRz ならば、xRz

問　フレーム (M,R) で論理式 $\Box\Box A\supset\Box A$ が恒真になるためには、R がどのような性質を持てばよいか。
解　(M,R) 上の同値性

$$\Box\Box A\supset\Box A \text{ が恒真} \Leftrightarrow R \text{ が稠密である}$$

を示す。R が稠密であるとは、「xRy ならば、ある z が存在し xRz かつ zRy」が成り立つことである。

まず、R が稠密であるとき $\Box\Box A\supset\Box A$ が恒真であることを示す。$a\not\models\Box\Box A\supset\Box A$ であるとすると、2 条件
　1)$a\models\Box\Box A$
　2)$a\not\models\Box A$

が成り立つ。1) より、

$1')aRx$ となるすべての x に対し $x \models \Box A$

が成り立つ。2) より、

$2')aRb$ となるある b に対し $b \not\models A$

が成り立つ。R が稠密なので、aRb に対して、aRc かつ cRb となる c が存在する。aRc と $1')$ より、$c \models \Box A$ となる。よって、

$3)cRy$ となるすべての y に対し $y \models A$

が成り立つ。3) と cRb より、$b \models A$ となる。これは、$2')b \not\models A$ と矛盾する。よって、$a \models \Box\Box A \supset \Box A$ が成り立つ。したがって、R が稠密であるとき $\Box\Box A \supset \Box A$ が恒真となる。

つぎに、R が稠密でないとき、$\Box\Box A \supset \Box A$ が恒真でないことを示す。R が稠密でないから、ある $a, b \in M$ が存在して、すべての u に対し「aRb かつ ($a\not R u$ または $u\not R b$)」となる。また、

$4)b \not\models p$、b 以外の z で $z \models p$

とする。aRb と 4) より、

$5)a \not\models \Box p$

が成り立つ。また、$a \not\models \Box\Box p$ であるとする。すると、

$6)aRc$ となるある c に対し $c \not\models \Box p$

が成り立つ。6) より、

$6')cRd$ となるある d に対し $d \not\models p$

が成り立つ。$b \neq d$ のとき、$6')$ の $d \not\models p$ は、4) の「b 以外の z で $z \models p$」という条件と矛盾する。また、$b = d$ のとき、aRb かつ aRc かつ cRb となるが、これは、条件「ある $a, b \in M$ が存在して、すべての u に対し「aRb かつ ($a\not R u$ または $u\not R b$)」」と矛盾する。よって、

$7)a \models \Box\Box p$

が成り立つ。5) と 7) より、$a \not\models \Box\Box p \supset \Box p$ が成り立つ。よって、R が稠密でないとき、$\Box\Box A \supset \Box A$ が恒真でない。

以上より、R が稠密 $\Leftrightarrow$ $\Box\Box A \supset \Box A$ が恒真となる。

4 時間論理

この節では、時間論理を導入し、第 3 節と同様に小野 [1] の問に解を与える。

二つの様相演算 [P] と [F] を導入し、$[\mathrm{P}]A$、$[\mathrm{F}]A$ をそれぞれ「過去においていつも A」、「未来においていつも A」と解釈する。また、$\langle\mathrm{F}\rangle A$、$\langle\mathrm{P}\rangle A$ をそれぞれ $\neg[\mathrm{F}]\neg A$、$\neg[\mathrm{P}]\neg A$ の省略形とする。また、R を到達可能関係とすると aRb は時点 b は時点 a より後にあることを意味することになる。$\Box A$ を $[\mathrm{P}]A \wedge A \wedge [\mathrm{F}]A$ の省略形とする。

定義 4.1(時間論理のフレームと付値) 空でない集合 M と、M 上の推移的な二項関係 R の対 (M,R) を (時間論理の) フレームという。フレーム (M,R) 上の付値は様相論理の場合と同様に定義される。ただし $a \in M$ に対し

(1)$a \models [\mathrm{P}]A \Leftrightarrow bRa$ となるすべての b に対し $b \models A$

(2)$a \models [\mathrm{F}]A \Leftrightarrow aRb$ となるすべての b に対し $b \models A$

と定める。

M 上の二項関係 R が狭義の全順序であるとは、R が推移的かつつぎの (1),(2) を満たすものとする。

(1) 任意の x, y に対し、xRy または $x = y$ または yRx。

(2) 任意の x に対し、xRx とはならない。

たとえば、整数全体の集合 Z 上の大小関係 $<$ は狭義の全順序である。

同様に、有理数全体の集合 Q や実数全体の集合 R 上の大小関係 $<$ は狭義の全順序であり、さらに、稠密である。

問 フレーム $(Z, <)$ で $A \wedge [\mathrm{P}]A \supset \langle\mathrm{F}\rangle[\mathrm{P}]A$ が恒真になることを示せ。また $(Q, <)$ では $A \wedge [\mathrm{P}]A \supset \langle\mathrm{F}\rangle[\mathrm{P}]A$ が偽になることを示せ。

解 まず、フレーム $(Z, <)$ で $A \wedge [\mathrm{P}]A \supset \langle\mathrm{F}\rangle[\mathrm{P}]A$ が恒真になることを示す。

$a \not\models A \wedge [\mathrm{P}]A \supset \langle\mathrm{F}\rangle[\mathrm{P}]A$ であると仮定すると、3 条件

$1)a \models A$

$2)a \models [\mathrm{P}]A$

$3)a \not\models \langle\mathrm{F}\rangle[\mathrm{P}]A$(つまり、$a \models [\mathrm{F}]\neg[\mathrm{P}]A$)

が成り立つ。2) より、

$2')x < a$ となるすべての x に対し $x \models A$

が成り立つ。3) より、$a < y$ となるすべての y に対し $y \not\models [\mathrm{P}]A$。したがって

$3')a + 1 \not\models [\mathrm{P}]A$

が成り立つ。$3')$ より、

$3'')b < a + 1$ となるある b に対し $b \not\models A$

が成り立つ。$<$ は整数の大小関係なので、$b < a + 1$ より、$b = a$ または $b < a$ である。$b = a$ のときは、1) より $b \models A$、$b < a$ のときは $2')$ より $b \models A$ となる。よって、いずれの場合も $b \models A$。これは、$3'')b \not\models A$ と矛盾する。よって、$a \models A \wedge [\mathrm{P}]A \supset \langle\mathrm{F}\rangle[\mathrm{P}]A$

次に、$(Q, <)$ では $A \wedge [\mathrm{P}]A \supset \langle\mathrm{F}\rangle[\mathrm{P}]A$ が偽になることを示す。

有理数 $0 \in Q$ が存在する。また、

$4)0 \models p, (u < 0 \Rightarrow u \models p), (0 < v \Rightarrow v \not\models p)$

が成り立つとする。4) より、

$5)0 \models p$

$6)0 \models [\mathrm{P}]p$

が成り立つ。また、$v \in Q$ なので、

7) すべての v に対し「$0 < v \Rightarrow 0 < \frac{v}{2}$ かつ $\frac{v}{2} < v$」

が成り立つ。$0 < v$ を満たす v を任意にとると、7) より、

$8)0 < \frac{v}{2} < v$

が成り立つ。また、8) と 4) より、

$9)\frac{v}{2} \not\models p$

が成り立つ。8) と 9) より、

$10)v \not\models [\mathrm{P}]p$

が成り立つ。10) と $0 < v$ より、

$11)0 \models [\mathrm{F}]\neg[\mathrm{P}]p$(つまり、$0 \not\models \langle\mathrm{F}\rangle[\mathrm{P}]p$)

が成り立つ。5)、6)、11) より、$0 \not\models p \wedge [\mathrm{P}]p \supset \langle\mathrm{F}\rangle[\mathrm{P}]p$ が成り立つ。

5 おわりに

本研究により、様相論理と時間論理の理解を深めることができた。

参考文献

[1] 小野寛晰:『情報科学における論理』. 日本評論社, 東京, 1994.