# 形式体系における推論規則の適用順序と実証明の表現法

2008MI026 原田直樹
指導教員：佐々木克巳

## 1　はじめに

本研究の目的は，形式体系の1つである，シークエント体系SNKにおける，推論規則の適用順序を対象として，そこから判断できる実証明の表現法を追求することである．本研究で対象とする実証明は，素朴集合論における，

$$A_1 \subseteq B_2 \text{かつ} \cdots \text{かつ } A_n \subseteq B_n \text{ならば}, A \cup B \subseteq C \cap D$$

の形の性質の証明である．

SNKは，上の性質の証明を，推論規則からなる証明図で表現する．そして，この表現は，推論規則の適用順序により異なる．また，これらの証明図は，佐々木[1]の方法により，実証明に変換できる．本研究では，2つの適用順序を対象として，次の2つの視点で証明図及び実証明の比較を行った．

視点1　場合の数
視点2　推論規則 $(\subseteq\rightarrow)$ の数

以下の2節では本研究が対象とするSNKの3つの推論規則 $(\rightarrow\cap)$,$(\cup\rightarrow)$,$(\subseteq\rightarrow)$ を導入し，対応する実証明の作成法を述べる．3節では，素朴集合論の具体的性質を対象として，2つの適用順序による証明図に対応する実証明の形を示し，4節では，視点2による比較を行う．

## 2　シークエント体系SNKと実証明

SNKおよびその証明図から実証明を作る方法は,佐々木[1]にしたがう．この節では，本研究が対象とするSNKの推論規則 $(\rightarrow\cap)$,$(\cup\rightarrow)$,$(\subseteq\rightarrow)$ を導入し，それらと実証明の対応を示す．まず，佐々木[1]の推論規則にある $(Def)$ を具体的にする．すなわち，本研究の $(Def)$ は，

$$\frac{\Gamma \rightarrow x \in A \wedge x \in B}{\Gamma \rightarrow x \in A \cap B}(\cap Def)$$

$$\frac{x \in A \vee x \in B, \Gamma \rightarrow R}{x \in A \cup B, \Gamma \rightarrow R}(\cup Def)$$

$$\frac{\forall x(x \in A \supset x \in B), \Gamma \rightarrow R}{A \subseteq B, \Gamma \rightarrow R}(\subseteq Def \rightarrow)$$

$$\frac{\Gamma \rightarrow \forall x(x \in A \supset x \in B)}{\Gamma \rightarrow A \subseteq B}(\rightarrow\subseteq Def)$$

を表し，これらは，素朴集合論における定義

$$x \in A \cap B \Leftrightarrow x \in A \text{ かつ } x \in B$$

$$x \in A \cup B \Leftrightarrow x \in A \text{ または } x \in B$$

$$A \subseteq B \Leftrightarrow \forall x(x \in A \text{ ならば}, x \in B)$$

に対応している(ただし，$A$,$B$は集合，$\Gamma$は論理式の集合，$R$は論理式である)．本研究で対象とする $(\rightarrow\cap)$,$(\cup\rightarrow)$,$(\subseteq\rightarrow)$ は，上の $(Def)$ と他のSNKの推論規則を組み合わたものである．具体的に以下に示す．

$$\frac{\Gamma \rightarrow x \in A \quad \Gamma \rightarrow x \in B}{\Gamma \rightarrow x \in A \cap B}\ (\rightarrow\cap)$$

$$\frac{x \in A \rightarrow R \quad x \in B \rightarrow R}{x \in A \cup B \rightarrow R}\ (\cup\rightarrow)$$

$$\frac{x \in A \rightarrow x \in A \quad x \in B \rightarrow x \in B}{x \in A, A \subseteq B \rightarrow x \in B}\ (\subseteq\rightarrow)$$

これらもSNKの推論規則とする．ここで，$(\subseteq\rightarrow)$ における $A \subseteq B$ を $(\subseteq\rightarrow)$ の主論理式という．これらと，素朴集合論の文の対応させる方法も示しておく．

$$\frac{[(x \in A \text{を示す.})]\Gamma \rightarrow x \in A \quad [(*_1)]\Gamma \rightarrow x \in B}{\Gamma \rightarrow x \in A \cap B \qquad [(*_2)]}\ (\rightarrow\cap)$$

ただし，$(*_1)$ は「$(x \in B$ を示す．)」，$(*_2)$ は「$(x \in A$ と $x \in B$ より，$)x \in A \cap B$ である.」である．

$$\frac{[(i)x \in A \text{のとき}:]x \in A \rightarrow R \quad [(*_3)]x \in B \rightarrow R}{x \in A \cup B \rightarrow R \qquad [(i),(ii) \text{より}, R \text{である}.]}\ (\cup\rightarrow)$$

ただし，$(*_3)$ は「(ii)$x \in B$ のとき:」である．

$$\frac{x \in A \rightarrow x \in A \quad [(*_4)]x \in B \rightarrow x \in B}{x \in A, A \subseteq B \rightarrow x \in B}\ (\subseteq\rightarrow)$$

ただし，$(*_4)$ は「$x \in A$ と $A \subseteq B$ より，$x \in B$である.」

なお，一般に，証明図は下から上に向かってつくられるので，証明図作成において，ある推論規則 $I$ を優先する(または，$I$ の適用順序が先である)とは，$I$ をその証明図の下側で適用することを意味する．

## 3　本研究で扱う素朴集合論の性質

本研究で扱った素朴集合論の性質は，以下の5つである．

$P_1 : A \subseteq B$ かつ $B \subseteq A$ ならば, $A \cup B \subseteq A \cap B$

$P_2 : A \subseteq B$ かつ $B \subseteq C$ ならば, $A \cup B \subseteq B \cap C$

$P_3 : A \subseteq B$ かつ $B \subseteq C$ かつ $C \subseteq D$ ならば, $A \cup B \subseteq C \cap D$

$P_4 : A \subseteq B$ かつ $A \subseteq C$ かつ $B \subseteq C$ ならば, $A \cup B \subseteq B \cap C$

$P_5 : A \subseteq C$ かつ $A \subseteq D$ かつ $B \subseteq C$ かつ $B \subseteq D$ ならば,

$A \cup B \subseteq C \cap D$

上の5つの性質に対する証明図は，どれも $(\rightarrow\subseteq Def)$,$(\rightarrow\forall\supset)$,$(\cup\rightarrow)$,$(\rightarrow\cap)$,$(\subseteq\rightarrow)$,$(w\rightarrow)$ のみを用いて作成できる．これらの証明図作成において，対象とした適用順序は次の2つである．

・適用順序1($(\cup\rightarrow)$ 優先)
$(\rightarrow Def \subseteq)$,$(\rightarrow\forall\supset)$,$(\cup\rightarrow)$, $(\subseteq\rightarrow)$(左上式がSNK公理),$(\rightarrow\cap)$

· 適用順序 2(($\to\cap$) 優先)
($\to Def\subseteq$),($\to\forall\supset$),($\to\cap$),($\cup\to$),($\subseteq\to$)(左上式がSNK公理)
本研究では，適用順序 1 と適用順序 2 による証明図を作成し，さらに対応する実証明を作成した．本稿では，$P_i(i=1,\cdots,5)$ の実証明の形のみを表 1 に示す．

表 1：性質 $P_i(i=1,\cdots,5)$ の実証明の形

| 性質 $P_i$ の (1) | 性質 $P_i$ の (2) |
|---|---|
| (i)$x\in A$ のとき：$\cdots\cdots$<br>(ii)$x\in B$ のとき：$\cdots\cdots$ | $x\in C$ を示す.<br>(i)$x\in A$ のとき：$\cdots\cdots$<br>(ii)$x\in B$ のとき：$\cdots\cdots$<br>$x\in D$ を示す.<br>(iii)$x\in A$ のとき：$\cdots\cdots$<br>(iv)$x\in B$ のとき：$\cdots\cdots$ |

どの性質も，(1) は場合の数が 2，(2) は場合の数が 4 となる．このことは，($\cup\to$) と ($\to\cap$) の優先順位により，説明でき，卒業論文に記述したが，本稿では省略する．

## 4 ($\subseteq\to$) の数の比較

この節では，表 1 にある各場合の実証明の長さについて考える．長さとは，実証明の文の長さという意味である．実証明 (i),(ii),(iii),(iv) のそれぞれの長さを調べることで，実証明の簡潔さを示すことができる．表 1 の各場合の文は卒業論文に記述したが，推論規則 ($\subseteq\to$),($\to\cap$),($\cup\to$) に対応した文のみで構成されている．そのうち，($\to\cap$),($\cup\to$) の文は，分岐を表しているので，実証明の長さは ($\subseteq\to$) の数に依存することになる．($\subseteq\to$) による実証明の長さを，実質的な長さということにする．性質 $P_3,P_5$ の実証明の各場合において，($\subseteq\to$) の対応を表 2, 表 3 に示し，比較する．ただし，これらの表において「あきらかに $\cdots$」となる場合は ($\subseteq\to$) がないので省略し，$A\subseteq B$ を主論理式とする ($\subseteq\to$) を $A\to B$ とかく．

表 2：性質 $P_3$ の実証明における ($\subseteq\to$) の比較

| 性質 $P_3$ の (1) | 性質 $P_3$ の (2) |
|---|---|
| (i)$x\in A$ のとき：$A\to B$<br>$B\to C$<br>$C\to D$<br>(ii)$x\in B$ のとき：$B\to C$<br>$C\to D$ | $x\in C$ を示す.<br>(i)$x\in A$ のとき：$A\to B$<br>$B\to C$<br>(ii)$x\in B$ のとき：$B\to C$<br>$x\in D$ を示す.<br>(iii)$x\in A$ のとき：$A\to B$<br>$B\to C$<br>$C\to D$<br>(iv)$x\in B$ のとき：$B\to C$<br>$C\to D$ |

($\subseteq\to$) の数は，(1) が 5 つに対して，(2) は 8 つある．つまり (1) と (2) の実質的な実証明の長さの差は，(2) の方が長くなることがわかる．

表 3：性質 $P_5$ の実証明における ($\subseteq\to$) の比較

| 性質 $P_5$ の (1) | 性質 $P_5$ の (2) |
|---|---|
| (i)$x\in A$ のとき：$A\to C$<br>$A\to D$<br>(ii)$x\in B$ のとき：$B\to C$<br>$B\to D$ | $x\in C$ を示す.<br>(i)$x\in A$ のとき：$A\to C$<br>(ii)$x\in B$ のとき：$B\to C$<br>$x\in D$ を示す.<br>(iii)$x\in A$ のとき：$A\to D$<br>(iv)$x\in B$ のとき：$B\to D$ |

(1) と (2) は ($\subseteq\to$) の数がそれぞれ 4 なので，実質的な実証明の長さは同じである．

どちらの性質においても，(2) の長さが (1) の長さ以上で，$P_3$ では 3 だけ (2) のが長く，$P_5$ では (1) も (2) も同じである．このことを，表 1,2 に現れる□→△の種類により説明する．

$P_3$ の表 (表 2) では，(2) において,「$x\in A$ のとき」の 2 つの場合 (i) と (iii) に，それぞれ $A\to B$ と $B\to C$ が現れ,「$x\to B$ のとき」の 2 つの場合 (ii) と (iv) に，それぞれ $B\to C$ が現れる．一方，(1) においては,「$x\to A$ のとき」の場合 (i) に $A\to B$ が 1 度，$B\to C$ も 1 度,「$x\to B$ のとき」の場合 (ii) に $B\to C$ が 1 度現れるだけである．つまり，(2) では，同じ意味の $A\to B$ が 2 度用いられるのに対し，(1) では 1 度である．この差が 3 である．$P_5$ の表 (表 3) では，このような差はない．

$P_2,P_3$ は一般に

$$A_1\subseteq A_2\text{かつ } A_2\subseteq A_3\text{かつ}\cdots\text{かつ } A_{n-1}\subseteq A_n\text{ならば,}$$
$$A_1\cup A_2\subseteq A_{n-1}\cap A_n(n\geq 3)\cdots(*)$$

の形をしている (n=4 の場合が $P_3$ である)．

$(*)$ の形の性質では，(2) の実証明において,「$x\in A_1$ のとき」の 2 つの場合に，それぞれ $A_1\to A_2,\cdots,A_{n-2}\to A_{n-1}$ が現れ,「$x\in A_2$ のとき」の 2 つの場合に，それぞれ $A_2\to A_3,\cdots,A_{n-2}\to A_{n-1}$ が現れるが，(1) の実証明では，それらが 1 度現れるだけである．この差は，$(n-2)+(n-3)=2n-5$ であり，(2) の実証明の実質的な長さは (1) より $2n-5$ だけ大きい．

すなわち，$(*)$ の形の性質の実証明では，(1) の方が証明を簡潔に表すことができる．

## 5 おわりに

今回の研究では，素朴集合論において,「$A_1\subseteq B_2$ かつ $\cdots$ かつ $A_n\subseteq B_n$ ならば，A$\cup B\subseteq C\cap D$」の形をした性質のシークエントを対象として，推論規則の適用順序によって異なる証明図と実証明の表現法があるとわかった．表現法の手続きを理解することで適切な実証明をかくことができるようになるので，今後は，他の性質のシークエントで比較を試み，さらに複数の表現法を研究していきたい．

## 6 参考文献

[1] 佐々木克巳:『シークエント体系の証明図から実証明を作る方法』, アカデミア情報理工学編第 11 巻,pp. 34–54,2011.