円板 Börsch-Supan 法による多項式零点の精度保証付き計算

2008MI024 濱野 兼丞
指導教員：杉浦 洋

1 はじめに

本研究では n 次モニック複素多項式の零点の精度保証付き計算を行うプログラムを作成する．具体的に，全ての零点に対しそれを含むできるだけ小さい複素閉円板を計算する．

'08 年の刀根 [1] では，零点を円板で精度保証するため，2 次収束する円板 Weierstrass 法を用いて解への反復を行い，同時収束させた．本研究では，3 次収束する円板 Börsch-Supan 法を用い，収束速度の向上を目指す．

同時反復解法を行うには全ての零点に対し，それらを包含する初期円板が必要となるので，Smith の定理を用いて初期円板生成を行う．

2 円板 Weierstrass 法

2.1 Weierstrass 法

モニックな n 次複素多項式を，

$$P(z) = z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0 \tag{1}$$

とし，その零点を $\zeta_i (1 \le i \le n)$ とする．初期値 $z_i^{(0)} \simeq \zeta_i (1 \le i \le n)$ より，

$$z_i^{(m+1)} = z_i^{(m)} - \frac{P_n(z_i^{(m)})}{\prod_{j=1, j\ne i}^{n}(z_i^{(m)} - z_j^{(m)})} \tag{2}$$

で数列 $\{z_i^{(m)}\}_{m\ge 0} (1 \le i \le n)$ を生成し，$\lim_{m\to\infty} z_i^{(m)} = \zeta_i$ を期待する方法を Weierstrass 法という．
初期値のそれぞれが十分に零点に近ければ Weierstrass 法で各数列 $\{z_i^{(m)}\}_{m\ge 0} (1 \le i \le n)$ は ζ_i に 2 次収束する．

2.2 円板 Weierstrass 法

中心 $c \in \mathbb{C}$，半径 $r > 0$ の複素閉円板 Z を $Z = \langle c; r\rangle$ と書く．式 (2) を円板に適用したものが，円板 Weierstrass 法である．零点 $\zeta_i (1 \le i \le n)$ に対し，それを含む初期円板 $Z_i^{(0)} \ni \zeta_i (1 \le i \le n)$ より，

$$Z_i^{(m+1)} = z_i^{(m)} - \frac{P(z_i^{(m)})}{\prod_{j=1, j\ne i}^{n}(z_i^{(m)} - Z_j^{(m)})}$$

で円板列 $\{Z_i^{(m)}\} = \{\langle z_i^{(m)}; r_i^{(m)}\rangle\} (1 \le i \le n)$ を生成する．円板 Weierstrass 法は 2 次収束する．

3 円板 Börsch-Supan 法

3.1 Börsch-Supan 法

Börsch-Supan 法の反復公式は，

$$z_i^{(m+1)} = z_i^{(m)} - \frac{w_i^{(m)}}{1 - \sum_{j\ne i} \frac{w_j^{(m)}}{z_j^{(m)} - z_i^{(m)}}} \tag{3}$$

$$w_j = \frac{P(z_j)}{\prod_{k=1, k\ne i}^{n}(z_j - z_k)} \tag{4}$$

である．この公式は Lagrange 補間を用いて導出される．

3.2 円板 Börsch-Supan 法

式 (3) を円板に適用したものが円板 Börsch-Supan 法である．初期円板 $Z_i^{(0)} \ni \zeta_i (1 \le i \le n)$ より，

$$Z_i^{(m+1)} = z_i^{(m)} - \frac{w_i^{(m)}}{1 - \sum_{j\ne i} \frac{w_j^{(m)}}{z_j^{(m)} - Z_i^{(m)}}} \tag{5}$$

で円板列 $\{Z_i^{(m)}\} = \{\langle z_i^{(m)}; r_i^{(m)}\rangle\}$ を生成する．

4 精度保証の実験

この節では Mathematica ver.8.0.1.0 を使い実際に円板 Börsch-Supan 法に基づく零点の包含円板を倍精度計算した．また，円板 Weierstrass 法と比較することにより，今回の円板 Börsch-Supan 法の有効性を検証する．

4.1 実験 1 初期円板の作成

円板反復法の初期円板となる Smith 円板を作成する．Smith 円板は Weierstrass 反復の近似解と修正量により，計算される．そこで，適当な初期値から，Smith 円板を作りながら，Weierstrass 反復を繰り返し，円板の半径が十分小さくなったところで，反復を停止し，初期円板とする．さて，Börsch-Supan 法における式 (4) は Weierstrass 法の修正量であるので，Börsch-Supan 反復で Smith 円板を作成し，初期円板を作成することができる．この二つの方法を実験し，比較する．

この実験で使用したモニックな n 次複素多項式は

$$f(z) = z^n - 1 = 0 \tag{6}$$

である．反復解法の初期値は

$$r = 2,$$
$$z_i = re^{\frac{2\pi i}{n}(n+\pi)},\ (1 \le i \le n)$$

とした．

$n = 4$ として，Smith 円板の縮小の様子を表 1, 表 2 に示す．方程式の解は $1, i, -1, -i$ である．

表 1 Weierstrass 法計算による反復回数と最大半径

m	r_{max}
1	1.44281
2	1.00738
3	6.0092×10^{-1}
4	2.21157×10^{-1}
5	2.53392×10^{-2}

表 2 Börsch-Supan 法計算による反復回数と最大半径

m	r_{max}
1	1.44281
2	6.92423×10^{-1}
3	8.46029×10^{-2}
4	8.22108×10^{-5}

Weierstrass 法計算は反復 3 回で円板は分離した．

Börsch-Supan 法計算は反復 2 回で円板は分離した．

$n = 4$ のとき Börsch-Supan 法のほうが Weierstrass 法よりも少ない反復回数で Smith 円板を分離できた．次に，次数 n を変えて Smith 円板の分離に要する反復回数を表 3 に示す.

表 3 Smith 円板の分離に要する反復回数

n	Weierstrass 法	Börsch-Supan 法
10	9	5
20	16	9
30	23	13
40	30	16
50	37	20

これら実験したすべての次数 n において Börsch-Supan 法は Weierstrass 法の半分強の反復回数で Smith 円板を分離する．Weierstrass 法と Börsch-Supan 法 1 回反復あたりの乗除算回数はそれぞれ $2n^2$ 回，$3n^2$ 回である．後者は前者の約 1.5 倍の計算量に過ぎないので，計算量の立場からも Börsch-Supan 法のほうが有利であるといえる.

4.2 実験 2 円板反復法による初期包含円板の改良

前節の Börsch-Supan 法で得られた初期円板から円板反復法により解の包含円板を縮小する．まず，前節で得られた Smith 円板を分離するための反復回数より 1 つ少ない回数の Börsch-Supan 反復を通常の数値計算で行う．次に精度保証付き計算で Smith 円板の作成を行い，確実に解を包含し，かつ分離された初期円板を構成する．ただし，$n = 10$ の場合だけは，円板反復法が零割り算で失敗したので，Börsch-Supan 反復の回数を 1 回増やした．その初期円板から円板 Weierstrass 法と円板 Börsch-Supan 法により包含円板の縮小を行う．$n = 10, 20, 30, 40$ における円板 Weierstrass 法計算結果を表 4，円板 Börsch-Supan 法計算結果を表 5 に示す.

円板 Weierstrass 法の $n = 40$ を除いて，両反復法とも理論的な収束次数より高い次数で収束しているように見える．これは問題の特性によるものであると思われる．包含円板の最大半径 r_{max} は反復を繰り返しても，10^{-15} より小さくならない．これは丸め誤差の影響である．2 つの方法で最終的に達成された r_{max} の値には有意な差はない．何回か反復を繰り返す場合には計算量の点で，円板 Börsch-Supan 法が有利である．初期円板で $r_{max} = r$ とすると，円板 Weierstrass 法は 2 次収束するので 3 回反復で $r_{max} = r^8$ となる．一方円板 Börsch-Supan 法は 3 次収束なので 2 回反復で $r_{max} = r^9$ となる．そして，円板 Weierstrass 法 3 回反復に要する乗除算数 $2n^2 \times 3$ は円板 Börsch-Supan 法 2 回反復に要する乗除算数 $3n^2 \times 2$ と等しい．ゆえに，計算量あたりの円板半径の縮小率において円板 Börsch-Supan 法の方が優れている.

表 4 円板 Weierstrass 法計算による包含円板の最大半径 r_{max} の値

k	$n = 10$	$n = 20$	$n = 30$	$n = 40$
0	3.3×10^{-4}	4.2×10^{-2}	1.9×10^{-4}	9.7×10^{-3}
1	1.5×10^{-11}	1.9×10^{-6}	4.1×10^{-12}	1.1×10^{-6}
2	5.0×10^{-15}	2.3×10^{-11}	5.3×10^{-15}	3.5×10^{-11}
3	4.0×10^{-15}	5.5×10^{-15}	4.4×10^{-15}	5.5×10^{-15}
4	4.4×10^{-15}	5.4×10^{-15}	4.6×10^{-15}	5.5×10^{-15}
5		5.4×10^{-15}		5.5×10^{-15}

表 5 円板 Börsch-Supan 法計算による包含円板の最大半径 r_{max} の値

k	$n = 10$	$n = 20$	$n = 30$	$n = 40$
0	3.3×10^{-4}	4.2×10^{-2}	1.9×10^{-4}	9.7×10^{-3}
1	3.8×10^{-15}	1.3×10^{-11}	3.8×10^{-15}	1.9×10^{-12}
2	4.4×10^{-15}	3.8×10^{-15}	4.6×10^{-15}	3.8×10^{-15}
3		5.4×10^{-15}		5.5×10^{-15}

5 おわりに

今回の研究によって，Weierstrass 反復よりも Börsch-Supan 反復で計算したほうが少ない反復回数で Smith 円板の分離することができ，また生成した初期円板の縮小においても計算量に関して，円板 Weierstrass 法計算よりも円板 Börsch-Supan 法計算したほうが有利であることが実証することができた．今回は 2 次収束を示す円板 Weierstrass 法と 3 次収束を示す円板 Börsch-Supan 法の比較しか行えなかったので，より高い収束次数を示す同時反復法による実験を行い，計算量に関して更なる改良をすることが今後の課題である.

参考文献

[1] 刀根佑介:「多項式の全複素零点に対する精度保証付き同時円板反復解法」，南山大学数理情報学部情報システム数理学科，2008.

[2] Miodrag Petković:「Iterative Methods for Simultaneous Inclusion of Polynomial Zeros」Springer-Verlag，Berlin-Heidelberg-NewYork，1989.