2 自由度ヘリコプタに対するシステム同定と離散時間系最適制御

2008MI022 萩原健太　2008MI262 渡辺大貴

指導教員：高見勲

1　はじめに

本研究では 2 自由度ヘリコプタに対し,

- システム同定
- 離散型の制御設計

を行うことで姿勢を制御する. システム同定においては

1. 同定実験の設計
2. 同定実験
3. システム同定
4. モデル妥当性の検証

の 4 つを軸に進める. 最終的に得られたモデルを実データとの波形を比べ, モデルの検証を行う.

制御設計においては, 得られたモデルをもとに最適レギュレータ理論を用いて離散型の制御設計行う. そして実験機を動作させせシミュレーションと実験結果比較することにより同定モデルと制御系設計の検証を行う.

2　制御対象

本研究では,2 自由度ヘリコプタを制御対象として用いる. ヘリコプタの模型は, 前後に DC モータで駆動する 2 つのプロペラがある. 前部のプロペラでピッチ軸まわりの回転を起こし, ヘリコプタ頭部の上下運動を制御し, 後ろのプロペラでヨー軸まわりの回転を起こし, ヘリコプタの左右の運動を制御する. また, ピッチ上方向に力を加えると, ヨー右方向に力が加わるような干渉をうけ, ヨー左方向に力を加えると, ピッチ下方向に力が加わる 2 入力 2 出力の実験装置である.

3　システム同定

3.1　ブラックボックスモデリング

ブラックボックスモデリングとは, 対象とする動的システムに対する物理的パラメータや事前情報を全く利用しないモデリング法 [1] であり, 実験から取得された入出力データをのみを用いて数学モデルを求める方法である. 本研究では, ヘリコプタにある前後 2 つのモータに対して, それぞれ電圧を加えることによって起こるピッチ方向, ヨー方向の振る舞いから数学モデルを求める.

3.2　同定実験の設計

機体をピッチ角, ヨー角共に 0[rad] で安定させるために, ピッチ角に 14.8[v], ヨー角に-3.8[v] を常に与え続ける. この状態で新たに入力を加えることにより機体の姿勢を変化させ, その入出力からモデルの導出を行う.　実際に実験を行う前に, 同定入力と, サンプリング周期 T を決めなければならない. サンプリング周期は, 立ち上がり時間の 95% を T_{95} とすると,T は下式を満たすように与える.

$$\frac{T_{95}}{100} \leq T \leq \frac{T_{95}}{10} \quad (1)$$

3.2.1　サンプリング周期の導出

実験機にステップ入力を加えた際の応答は次のようになった.

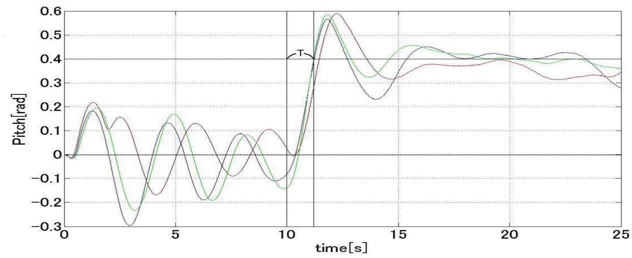

図 1　ステップ応答

上図より立ち上がり時間は約 1 秒であることが分かる. そこでサンプリング周期は 0.05 秒とした.

3.3　同定実験

ピッチ角, ヨー角に対する入力電圧を周波数 0.4[Hz],0.7[Hz],1.0[Hz] の共に振幅 0.5[v] の正弦波を 3 つ重ねた時の出力の波形は以下のようになる.

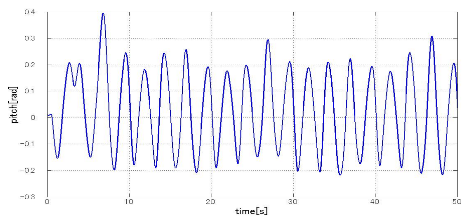

図 2　ピッチ方向に対する出力 y1

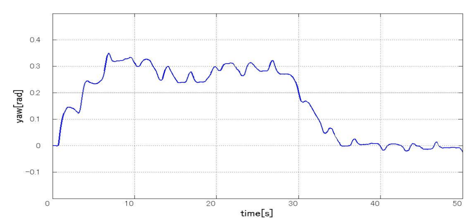

図 3　ヨー方向に対する出力 y2

3.4　システム同定

本研究では最小 2 乗法を利用するために最も都合のよい ARX モデルに回帰させることにした. パラメータ推定を行うための評価規範を定める必要がある. その評価規範として,

$$J_N(\theta) = \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} l(k, \theta, \varepsilon(k, \theta)) \tag{2}$$

を設定する. ここで,$l(k, \theta, \varepsilon(k, \theta))$ は予測誤差

$$\varepsilon(k, \theta) = y(k) - \hat{y}(k|\theta) \tag{3}$$

の大きさを測る任意の正のスカラ値関数である. このような評価規範を定義することにより, 未知パラメータ θ の推定値 $\hat{\theta}(N)$ は決定される. このように予測誤差から構成される評価規範 $J_N(\theta)$ を最小にするように推定値を計算するパラメータ推定法は, 予測誤差法 (Prediction error method:PEM) と言う [2].

式 (2) の l を

$$l(k, \theta, \varepsilon(k, \theta)) = \varepsilon^2(k, \theta) \tag{4}$$

とした場合, 式 (4) を用いて式 (2) を最小にすることを最小 2 乗法と言う.

本研究では, パラメータ推定にこの理論を用いた. パラメータ推定のための評価規範は式 (2) より,

$$J_N(\theta) = \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} \varepsilon^2(k, \theta) = \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} \{y(k) - \theta^T \phi(k)\}^2 \tag{5}$$

となる. これをさらに計算すると,

$$J_N(\theta) = c(N) - 2\theta^T f(N) + \theta^T R(N)\theta \tag{6}$$

が得られる. ただし,

$$R(N) = \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} \phi(k)\phi^T(k) \tag{7}$$

$$f(N) = \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} y(k)\phi^T(k) \tag{8}$$

$$c(N) = \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} y^2(k) \tag{9}$$

である. また,ϕ は

$$\phi(k) = [-y(k-1), \cdots, -y(k-n), u(k-1), \cdots, uk-m]^T \tag{10}$$

である.　ここで, 式 (6) の $J_N(\theta)$ を θ に関して微分し 0 とおく. すると正規方程式と呼ばれる θ に関する連立 1 次方程式が得られ, 線形回帰モデルのパラメータを最小 2 乗法によって推定する問題は次式に表される連立 1 次方程式を解く問題に帰着される.

$$R(N)\hat{\theta}(N) = f(N) \tag{11}$$

3.5　次数の選定

先に述べた理論を用いて, 伝達関数を求める.$u1$ から $y1$ に対する伝達関数を G_{11},$u2$ から $y2$ に対する伝達関数を G_{22} とする. ピッチ角からヨー角, ヨー角からピッチ角に対するそれぞれの干渉を無視した 1 入力 1 出力のブロック線図は次のようになる.

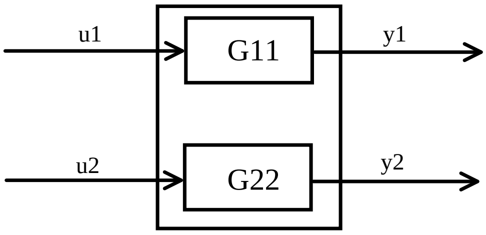

図 4　1 入力 1 出力ブロック線図

ARX モデルの伝達関数の次数を 1 次から 5 次まで求め, 実データと比較を行う. 図 4 の入出力の波形を次に示す. この時, 破線は次数 1 のモデル, 黒の実線が実測値の波形である.

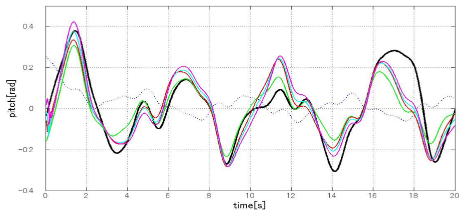

図 5　ピッチにおける比較

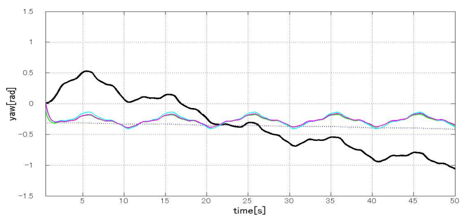

図 6　ヨー角における比較

次数 1 のモデルは, 実験結果と異なる振る舞いをしている. しかし, 次数 2 以上からは, 実験結果と同じような振る舞いをして大きな変化が見られない. 一般的に次数が高ければ高いほど, 実験結果を強く反映したモデルとなるが, その分汎用性が失われてしまう. そこで制御設計の簡単化のために, 次数 2 のモデルを使用することにした. 導出したモデルは, 以下の式 (12), 式 (13) となる.

$$G_{11}(z) = \frac{-0.001555z^{-1} + 0.003527z^{-2}}{1 - 1.978z^{-1} + 0.9884z^{-2}} \tag{12}$$

$$G_{22}(z) = \frac{-0.0003906z^{-1} + 0.0009692z^{-2}}{1 - 1.895z^{-1} + 0.8947z^{-2}} \tag{13}$$

3.6 モデル妥当性の評価

式 (12) と式 (13) の伝達関数を用いたモデルで, 実データとの入出力の波形を比較する. 図 5 と図 6 より, 周期と振幅の大まかな特徴は十分とらえられているといえる.ARX モデルの実データとの比較を行うにあたり, ピッチ角に対して入力電圧を周波数 0.3[Hz],0.7[Hz],0.9[Hz] の共に振幅 0.5[v] の正弦波を 3 つ重ねた時の出力の波形と比較し, ヨー角に対して入力電圧を周波数 0.1[Hz],0.3[Hz],0.8[Hz] の共に振幅 0.5[v] の正弦波を 3 つ重ねた時の出力の波形と比較を行った.

4 制御理論

本研究では現代制御理論の一つである最適制御理論を用いて制御系を設計する. 離散時間系の場合, 対象となるシステムの状態方程式は

$$\begin{aligned} x(k+1) &= \bar{A}x(k) + \bar{B}u(k) \quad (k = 0, 1, \cdots) \\ y(k) &= \bar{C}x(k) + \bar{D}u(k)x(0) = x_0 \end{aligned} \tag{14}$$

で表される.

この時,$\bar{A}, \bar{B}$ が可制御である場合に

$$\begin{aligned} \hat{J} &= \sum_{n=0}^{\infty}[x^T(k)Qx(k) + u^T(k)Ru(k)] \\ Q &= diag\{q_1, q_2, ..., q_n\} \quad (Q \geq 0, R \geq 0) \end{aligned} \tag{15}$$

を最小にする制御入力 $u(k)(k = 0, 1, \cdots)$ を求める最適レギュレータ問題となる. 上記のように離散時間系の場合は, 評価関数 J は和で与えられる [3].

式 (15) の離散時間系の最適レギュレータ問題は, 次式のリカッチ方程式

$$\Pi = Q + \bar{A}^T\Pi\bar{A} - \bar{A}^T\Pi\bar{A}(R + \bar{B}^T\Pi\bar{B})^{-1}\bar{B}^T\Pi\bar{A} \tag{16}$$

を満たす解が存在する必要がある. 一般的に式 (16) は, 唯一ではないため, 題意により $\Pi \geq 0$ となる解を選ばなければならない [4].

5 制御系設計

5.1 状態空間表現の導出

ピッチ角に対する入力データ $u1$ と出力データ $y1$ から得られた伝達関数式 (12) から状態空間表現を求めた結果, 次式のようになった.

$$x(k+1) = \begin{bmatrix} 1.978 & -0.9884 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} x(k) + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u(k)$$

$$y(k) = \begin{bmatrix} -0.001555 & 0.003527 \end{bmatrix} x(k) \tag{17}$$

ヨー角に対する入力データ $u2$ と出力データ $y2$ から得られた伝達関数式 (13) から状態空間表現を求めた結果, 次式のようになった.

$$x(k+1) = \begin{bmatrix} 1.895 & -0.8947 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} x(k) + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u(k)$$

$$y(k) = \begin{bmatrix} -0.0003906 & 0.0009692 \end{bmatrix} x(k) \tag{18}$$

5.2 可制御性

最適レギュレータを用いて状態フィードバックゲインを求めるためには, 式 (14) が可制御でなければならない. 式 (17), 式 (18) より V_{c1},V_{c2} を求め可制御性を調べる.

$$V_{c1} = \begin{bmatrix} 1 & 1.978 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{19}$$

$$V_{c2} = \begin{bmatrix} 1 & 1.895 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{20}$$

$$ranc(V_{c1}) = ranc(V_{c2}) = 2 \tag{21}$$

となり式 (17), 式 (18) は可制御である.

5.3 状態フィードバックゲインの導出

得られた状態空間表現から拡大系を設計する.

5.3.1 ピッチ角

ピッチ角のシステム行列の拡大系は

$$A_{e1} = \begin{bmatrix} 1.978 & -0.9884 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0.001555 & -0.003527 & 1 \end{bmatrix} \tag{22}$$

$$B_{e1} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{23}$$

$$C_{e1} = \begin{bmatrix} -0.001555 & 0.003527 & 0 \end{bmatrix} \tag{24}$$

となる.
また, 重み Q_1,R は以下のように定める.

$$Q_1 = diag\{200, 150, 0.5\} \tag{25}$$

$$R = 1 \tag{26}$$

求められた状態フィードバックゲインは, 次式のようになる.

$$[K_{e1} \quad F_1] = \begin{bmatrix} -1.9671 & 0.9855 & 0.0375 \end{bmatrix} \tag{27}$$

5.3.2　ヨー角

ヨー角の拡大系のシステム行列は

$$A_{e2} = \begin{bmatrix} 1.895 & -0.8947 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0.0003906 & -0.0009692 & 1 \end{bmatrix} \tag{28}$$

$$B_{e2} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{29}$$

$$C_{e2} = \begin{bmatrix} -0.0003906 & 0.0009692 & 0 \end{bmatrix} \tag{30}$$

となる．また, 重み Q_2,R は以下のように定める．

$$Q_2 = diag\{30, 200, 0.07\} \tag{31}$$

$$R = 1 \tag{32}$$

求められた状態フィードバックゲインは, 次式のようになる．

$$[K_{e2} \quad F_2] = \begin{bmatrix} -1.8798 & 0.8909 & 0.0172 \end{bmatrix} \tag{33}$$

6　シミュレーション・実験

6.1　安定化制御

ピッチ角, ヨー角共に 50 秒の間 0[rad] で平衡状態を保たせるシミュレーションと実験を行う．

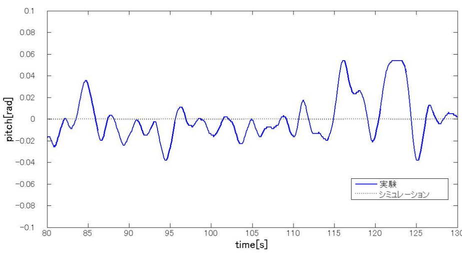

図 7　ピッチ角の安定化制御

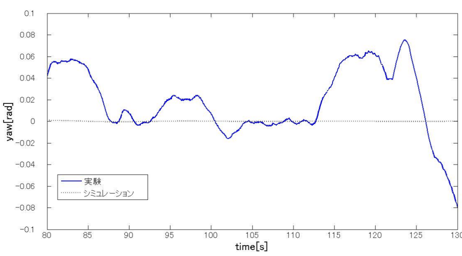

図 8　ヨー角の安定化制御

6.2　追従制御

ステップ時間を 100 秒とし, ピッチ角が 0[rad] の平衡状態からスタートし，ピッチ角の目標値を-0.3[rad] としてステップ状に変化させる．その際のピッチ角とヨー角の振る舞いを以下に示す．

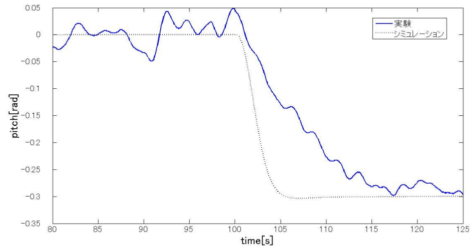

図 9　ピッチ角の追従制御

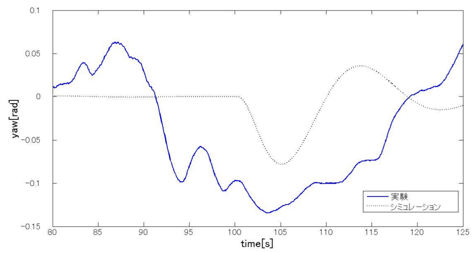

図 10　ヨー角の振る舞い

ピッチ角, ヨー角共に平衡状態を保つことに成功し, また目標値にも追従していることがわかる．

7　終わりに

本研究によって得られた成果を示す．

・２自由度ヘリコプタのシステム同定を行い ARX モデルを用いて伝達関数を導出した．

・システム同定によって得られたモデルの妥当性を実験により検証した．

・1 入力 1 出力系での離散時間系最適レギュレータを用いた制御系設計を行った．

・離散時間系最適レギュレータ理論の妥当性を実験により検証した．

参考文献

[1] 足立修一:MATLAB による制御のためのシステム同定, 東京電機大学出版局 (1996)

[2] 足立修一:MATLAB による制御のための上級システム同定, 東京電機大学出版局 (2004)

[3] 美多勉:ディジタル制御理論, 昭晃堂 (1984)

[4] 兼田雅弘 山本幸一郎:ディジタル制御工学, 共立出版 (1989)