

総合スーパーの待ち行列

2008MI003 足立亮介 2008MI209 佐藤元基

指導教員：澤木勝茂

1 はじめに

総合スーパーでの会計は各売り場ごとのレジ方式で行われている。総合スーパーは集客力や売り場づくりを強みとしており、混雑時など待ち人数が多いとシステムを離れてしまう人がでてきてしまう。厳しいスーパー競争を乗り切るために行列の待ち時間を減らすことは急務であり、これを研究テーマとする。まず現状モデルを数値計算し問題を明確にしモデル2ではレジを一つ、二つに集め待ち行列での移動距離、行列が通路幅に与える影響などを考慮したモデルを考える。行列の並び方は端から並びエンド型と中央から並びセンター型の二種類として研究を行う。モデル3では混雑を起こした場合の解決を考え、レジのサービスの会計と商品の袋詰め作業を分担するモデルをつくる。これにより全体のサービス時間が短くなり円滑にサービスが進むと考えられる。現状モデルとモデル2、モデル3を比較して最適レジ稼働台数を導き出す。

2 現状モデル

この章では現状の待ち行列のモデルを定式化、数値計算を行い、問題を明確する。

2.1 現状モデルの説明

各売り場にレジが図1のように配置されている。家庭用品売り場、医薬品売り場、家電売り場はレジが2台設置されており、手芸用品売り場、寝具売り場には1台設置している。各レジの行列はM/M/1, M/M/2 待ち行列に従う。

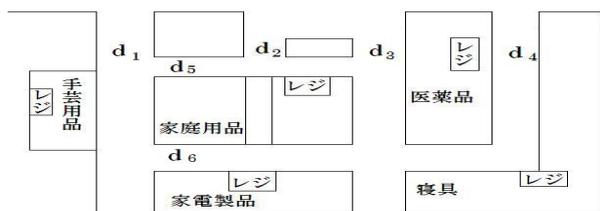


図1 レジ配置

2.2 現状モデルの数値計算

2.2.1 計算準備

[2]によるとレジの待ち時間が90秒を超えると時間間隔が狂ってしまい、ひどく大げさになる。また[1]では平均待ち時間が約120秒を超えると不快感を感じるとしている。そのため平均待ち時間90秒以上になる場合にレジを2台稼働させる。一時間に10人も来客していない場合、その売り場のレジは封鎖して計算する。家庭用品レジ、医薬品レジ、家電レジ、手芸レジ、寝具レジの来客数はそれぞれ $0.371\lambda, 0.337\lambda, 0.110\lambda, 0.086\lambda, 0.096\lambda$ とする。

2.2.2 結果の考察

表1より来客数が一時間に120人の時、総レジ稼働数6台と客が多く並ぶ時に比べ1台しか変わっていない。これは家庭用品レジ、医薬品レジで平均待ち時間90秒未満を満たすため窓口を2つ稼働したが、平均待ち人数、平均待ち時間ともかなり低く無駄に稼働している可能性が考えられる。また家電レジ、寝具レジ、手芸用品レジでは来客数が多い時と少ない時を比べても稼働数は1台であり、来客数が少ない時の平均待ち時間などがかなり低くこちらも無駄に稼働していると言える。混雑しているレジと空いているレジの差が大きいこととレジを1台稼働させると混雑を起こしてしまうが2台稼働させるとほぼ客が並ばなくなってしまうことからレジが無駄に稼働している問題があると思われる。

3 モデル2(レジを集めた場合)

3.1 モデルの説明

このモデルではレジを一か所に集めた場合、二か所に集めた場合で考える。集めたことでレジの混み具合が平均化され行列の混雑を減少されると推測できる。しかしレジを集めることで当然売り場からの距離が遠くなることや、行列が長くなり移動通路に影響をあたえる場合がある。そのため集めた時のレジ配置や待ち行列を距離、通路に与える影響も考慮しレジ稼働台数を考える。

3.2 レジ配置

レジを集めた場合行列が長くなるため行列が移動する通路に影響を与えないこととレジの会計場所がすぐ分かるように大きな移動通路に設置する。またすべての客のなかで最も遠い距離を最小限にするようにレジを配置する。すなわち売り場の範囲の中央に設置する。ここでレジを一か所に集めたレジ集合を G_1 、二か所に集めたレジ集合を H_1, H_2 とする

3.3 レジ設置の最適化

通路の幅が4(m)以上の通路、 d_1, d_2, d_3, d_4, d_5 の通路に面している場所がレジ設置場所候補とする。レジ場所を売り場の中央に設置し d_i に接するよう計算を行い単位メートル(m)とする。

・レジを一か所に集めた場合

$$(X_{G_1}, Y_{G_1}) = (50.75, 34.5)$$

・二か所に集めた場合

$$\begin{cases} (X_{H_1}, Y_{H_1}) = (33.835, 15.5) \\ (X_{H_2}, Y_{H_2}) = (68, 36) \end{cases} \quad (1)$$

$$\begin{cases} (X_{H_1}, Y_{H_1}) = (33.835, 34.5) \\ (X_{H_2}, Y_{H_2}) = (68, 18) \end{cases} \quad (2)$$

3.4 レジを二か所に集めた場合の客数予測

どれほどの割合で客が分かれるのか予測の式をたてる。客は会計をしようとする時に距離が近いレジ集合に並びとするとその境界線は

$$\sqrt{(X_{H_1} - x)^2 + (Y_{H_1} - y)^2} = \sqrt{(X_{H_2} - x)^2 + (Y_{H_2} - y)^2}$$

$$y = -\left(\frac{X_{H_1} - X_{H_2}}{Y_{H_1} - Y_{H_2}}\right)x + \frac{1}{2}\left(Y_{H_1} + Y_{H_2} + \frac{X_{H_1}^2 - X_{H_2}^2}{Y_{H_1} - Y_{H_2}}\right)$$

* X_{H_i}, Y_{H_i} はそれぞれ H_i の x 座標, y 座標を表している

. H_1 で会計する客は

$$\lambda_{H_1} = a\lambda_{dy} + b\lambda_{ey} + c\lambda_{ka} + d\lambda_{pa} + e\lambda_{si}$$

H_2 で会計する客は

$$\lambda_{H_2} = (1-a)\lambda_{dy} + (1-b)\lambda_{ey} + (1-c)\lambda_{ka} + (1-d)\lambda_{pa} + (1-e)\lambda_{si}$$

* a, b, c, d, e は境界線が売り場を分けた時, H_1 に近い売り場の割合を表している。

3.4.1 数値計算

(2) の時 $H_1:H_2$ の客が集まる比率は 0.496:0.504

(3) の時 $H_1:H_2$ の客が集まる比率は 0.425:0.575

本論文では (2) の時を, 二か所に集めた場合で数値計算を行い (3) の場合は数値計算を行わない。

3.5 行列の並べ方

レジを集め窓口の数増えると当然行列の先頭から窓口までの移動距離を増える。そのため移動距離を考慮した待ち行列を考える。

・M/M/S(行列を端に並ばせる場合)

総窓口の間隔ほど行列が並べられるので通路に及ぼす影響は少ない。しかし窓口数が多くなるほど行列の先頭から窓口までの移動する時間が増えてしまう。

・M/M/S(行列を窓口の中央に並ばせる場合)

端に並ばせる場合に比べ行列の先頭から窓口までの移動する時間が短くなるが行列が総窓口間隔の 1/2 を超えると通路に影響を及ぼしてしまう。

ここでは M/M/S の行列を端に並ばせた場合と中央に並ばせた場合を比較し考察していく。

3.6 待ち行列の定式化

ここでセルオートマトンを用いた [8] を参考に移動距離を考慮した待ち行列を定式化する。

窓口 n のサービス率 μ_{d_n} は次のように与えられる.[8]

$$\mu_{d_n} = \frac{\tilde{\mu}}{1 + 2\beta d_n}$$

$$\begin{cases} \frac{1}{\tilde{\mu}} = \frac{1}{\mu} + \frac{a+b}{\gamma} \\ \alpha = \frac{k}{\gamma} \\ \beta = \frac{1}{2}\alpha\tilde{\mu} \end{cases} \quad (3)$$

a は待ち行列の先頭から合流部までのセル数, b は合流部より窓口 1 までのセル数, k は窓口の間隔セル数, γ は平均

移動率を表している。

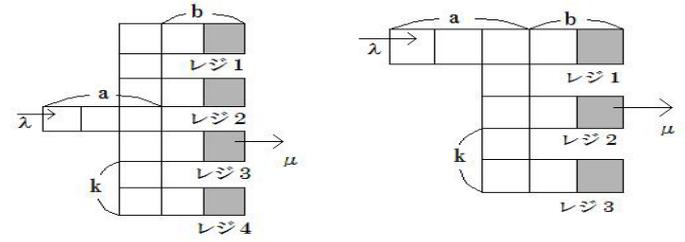


図 2 移動レジ

d_n は行列を端, 中央に並べる時以下ようになる。

$$(端) \quad d_n = \frac{1}{2}(n-1)$$

$$(中央) \quad d_n = \frac{1}{4}\left(n - \frac{1 + (-1)^{n+1}}{2n}\right)$$

$$P_0 = \frac{1}{1 + A + B}$$

$$P(n) = \begin{cases} (\tilde{\rho}s)^n \prod_{l=1}^n \left[\frac{l + 2\beta d_l}{l}\right] P_0 & (1 \leq n \leq s-1) \\ (\tilde{\rho}s)^s [\tilde{\rho}(1 + 2\beta d_s)]^{n-s} \prod_{l=1}^s \left[\frac{l + 2\beta d_l}{l}\right] P_0 & (n \geq s) \end{cases} \quad (4)$$

$$P_{n \geq s} = B P_0$$

$$L_q = \frac{\tilde{\rho}[1 + 2\beta d_s]}{1 - \tilde{\rho}[1 + 2\beta d_s]} B P_0$$

$$W_q = \frac{L_q}{\lambda}$$

$$\tilde{\rho} = \frac{\lambda}{s\tilde{\mu}}$$

$$A = \sum_{n=1}^{s-1} [(\tilde{\rho}s)^n \prod_{l=1}^n \frac{l + 2\beta d_l}{l}]$$

$$B = \frac{\prod_{l=1}^s [\tilde{\rho}s \frac{l + 2\beta d_l}{l}]}{1 - \tilde{\rho}[1 + 2\beta d_s]}$$

3.7 数値計算

3.7.1 計算準備

[1][2] より平均待ち時間 90 秒以下を満たすことを条件にし, 合流地点まで 0.5m, 合流地点から窓口 1 まで 0.5m, 窓口間隔 1.5m, 客の平均歩行速度 1.1(m/s) として計算した。また 3.4.1 よりレジを二か所に集めた場合の H_1, H_2 の来客数は $0.496\lambda, 0.504\lambda$ とする。

3.7.2 考察

一か所に集めた場合, 二か所に集めた場合, それぞれ表 1 より現状モデルに比べかなりレジ稼働台数を減らすこと

ができた。また行列が端に並んだ場合と中央に並んだ場合を比較すると混雑してる時と窓口の数が多い時に、待ち行列としての性能(平均待ち時間, 平均待ち人数など)の差が大きくなっている。しかし一番平均待ち時間の差が大きくなるでも高々20秒弱であり稼働台数では差がほとんどでない。また通路への影響を考えた時エンド型では $k \cdot S$ 幅(k は窓口間隔, S はレジ設置台数)売り場, 通路に影響が出ないよう客が並べるのに対してセンター型は幅 $(k \cdot S)/2$ しか売り場や通路に影響がでないよう客が並べられないことからセンター型が待ち行列の性能として若干優秀であるが売り場・通路に与える影響を考えた場合, エンド型の方が与える影響が少ないことが分かる。

4 モデル3(混雑時にサービス率が変化)

4.1 モデル3の説明

レジのサービスとして1. 商品を会計すること, 2. 会計した商品を袋に入れ手渡すことであるが2. を売り場の人などが手伝い, 作業を分担することで全体のサービス時間が1.5倍早くなることがわかっている。

このモデルではレジが混雑してきたら売り場の人に混雑がなくなるまでレジの作業を分担してもらうモデルをモデル1(現状), モデル2に組み込み最適なレジ稼働台数を導き出す。

4.2 モデル3 定式化 (現状モデル型の考慮)

現状モデルは各売り場にレジが存在し各レジ M/M/1, 条件を満たさない場合は M/M/2 に従う。

系の中が c 人以上のとき混雑しているとみなし, サービス率が μ_c に変化する。

4.2.1 M/M/1

M/M/1 に従う。系の中に n 人いる確率 P_n , 分担してサービスしている確率 $P_{c \leq n}$, 平均待ち時間 W_q , 平均待ち人数 L_q は

$$\begin{aligned}
 P_0 &= \frac{1}{1 + \sum_{n=1}^{c-1} \rho^n + \sum_{n=c}^{\infty} \rho_c^{n-c} \rho^c} \\
 P(n) &= \begin{cases} \rho^n P_0 & (n < c) \\ \rho_c^{n-c} \rho^c P_0 & (c \leq n) \end{cases} \quad (5) \\
 P_{c \leq n} &= \sum_{n=c}^{\infty} \rho_c^{n-c} \rho^c P_0 \\
 L_q &= \sum_{n=1}^{\infty} (n-1) P_n \\
 W_q &= \frac{1}{\lambda} L_q \\
 \rho_c &= \frac{\lambda}{\mu_c}
 \end{aligned}$$

4.2.2 M/M/2

M/M/1 で条件を満たさなかった時窓口を増やし M/M/2 に従う。

系の中に n 人いる確率 P_n , 分担してサービスしている確率 $P_{c \leq n}$, 平均待ち時間 W_q , 平均待ち人数 L_q は

$$\begin{cases} P_n = \frac{a^n}{n!} P_0 & (0 < n < s) \\ P_n = \frac{a^n}{s! s^{n-s}} P_0 & (s \leq n < c) \\ P_n = \frac{a_c^{n-c} a^c}{s! s^{c-s}} P_0 & (c \leq n) \\ P_0 = \frac{1}{1 + A + B + C} \end{cases} \quad (6)$$

$$A = \sum_{n=1}^{s-1} \frac{a^n}{n!}$$

$$B = \sum_{n=s}^{c-1} \frac{a^n}{s! s^{n-s}}$$

$$C = \sum_{n=c}^{\infty} \frac{a_c^{n-c} a^c}{s! s^{c-s}}$$

$$L_q = \sum_{n=s}^{\infty} (n-s) P_n$$

$$W_q = \frac{1}{\lambda} L_q$$

4.3 モデル3 定式化 (モデル2型の考慮)

モデル2ではレジを一つ, 二つに集めセルオートマトンを利用し行列の先頭から窓口までの移動距離を考慮し端に並ばせる型, 中央に並ばせる型を考えた。ここでさらに系の中が c 人以上のとき混雑しているとみなし, c 人以上の時サービス率が μ_c に変化させ定式化する。[8] 窓口 n の通過率 μ_{d_n} は

$$\begin{cases} \mu_{d_n} = \begin{cases} \frac{\tilde{\mu}}{1 + 2\beta d_n} & (0 \leq n < c) \\ \frac{\tilde{\mu}_c}{1 + 2\beta d_n} & (c \leq n) \end{cases} \quad (7) \\ \begin{cases} \frac{1}{\tilde{\mu}} = \frac{1}{\mu} + \frac{a+b}{\gamma} & (0 \leq n < c) \\ \frac{1}{\tilde{\mu}_c} = \frac{1}{\mu} + \frac{a+b}{\gamma} & (c \leq n) \\ \alpha = \frac{k}{\gamma} \\ \beta = \frac{1}{2} \alpha \tilde{\mu} & (0 \leq n < c) \\ \beta_c = \frac{1}{2} \alpha \tilde{\mu}_c & (c \leq n) \end{cases} \quad (8) \end{cases}$$

μ_c は混雑している状態 c 以上の場合のサービス率, a は待ち行列の先頭から合流部までのセル数, b は合流部より窓口1までのセル数, k は窓口の間隔セル数, γ は平均移動率を表している。

d_n は行列を端, 中央に並べる時以下ようになる。

$$(\text{端}) \quad d_n = \frac{1}{2}(n-1)$$

$$(\text{中央}) \quad d_n = \frac{1}{4}\left(n - \frac{1 + (-1)^{n+1}}{2n}\right)$$

系の中に n 人いる確率 P_n , すぐサービスを受けられる確率 $P_{n < s}$, 混雑状態 c 以上の確率 $P_{c \leq n}$, 平均待ち時間 W_q ,

平均待ち人数 L_q は

$$P_0 = \frac{1}{1 + A + B + C}$$

$$P(n) = \begin{cases} (\tilde{\rho}s)^n \prod_{l=1}^n \left[\frac{1 + 2\beta d_l}{l} \right] P_0 & (1 \leq n \leq s-1) \\ (\tilde{\rho}s)^s [\tilde{\rho}(1 + 2\beta d_s)^{n-s}] \prod_{l=1}^s \left[\frac{1 + 2\beta d_l}{l} \right] P_0 & (s \leq n < c) \\ (\tilde{\rho}s)^s [(\tilde{\rho}_c(1 + 2\beta_c d_s))^{n-c}] [(\tilde{\rho}(1 + 2\beta d_s))^{c-s}] \prod_{l=1}^s \left[\frac{1 + 2\beta d_l}{l} \right] P_0 & (s \leq n < c) \end{cases} \quad (9)$$

$$L_q = \sum_{n=s}^{\infty} (n-s) P_n$$

$$W_q = \frac{L_q}{\lambda}$$

$$\tilde{\rho} = \frac{\lambda}{s\tilde{\mu}}$$

$$\tilde{\rho}_c = \frac{\lambda}{(s-x)\tilde{\mu} + x\tilde{\mu}_c} \quad (x \text{ は分担する人数 } (x < s))$$

$$A = \sum_{n=1}^{s-1} (\tilde{\rho}s)^n \prod_{l=1}^n \left[\frac{1 + 2\beta d_l}{l} \right]$$

$$B = \sum_{n=s}^{c-1} (\tilde{\rho}s)^s [\tilde{\rho}(1 + 2\beta d_s)^{n-s}] \prod_{l=1}^s \left[\frac{1 + 2\beta d_l}{l} \right]$$

$$C = \sum_{n=c}^{\infty} (\tilde{\rho}s)^s [(\tilde{\rho}_c(1 + 2\beta_c d_s))^{n-c}] [(\tilde{\rho}(1 + 2\beta d_s))^{c-s}] \prod_{l=1}^s \left[\frac{1 + 2\beta d_l}{l} \right]$$

4.4 数値計算

4.4.1 数値計算の準備

数値計算をする前に条件を設定する

- 混雑している状態を系内客数が窓口数 3 倍の場合とみなす ($c \leq n$ の混雑状態)
- 作業を分担してくれる人は一人とする ($x = 1$)
- 作業を分担する確率は 0.2 未満とする ($P_{c \leq n} < 0.2$)
- 平均待ち時間 W_q は 90 秒以下とする

以上の条件を満たす最小な稼働台数を最適なレジ稼働台数とし数値計算する。

4.5 考察

表 1 よりモデル 3 では現状モデル, モデル 2 と比較して稼働台数, 平均待ち時間, 平均待ち人数を減らすことができた。また混雑時にサービス率が上がるので混雑している状態やレジが暇になる確率も減らすことができた。

5 全体の考察, おわりに

表 1 からモデル 3 を組み入れたレジを一つに集めた場合が一番性能がよくなった。ただし当然, 物理的な利便性(売り場からの移動距離など)ではレジ一か所 < レジ二か所 < 現状配置となっていることもあるので一概に良いとは言えないがこの計算結果を参考に良い意思決定ができるのではないかと思う。

6 すべてのモデルの数値計算結果

すべてのモデルを比較したレジ稼働台数を表に示す。(1)(2) はそれぞれレジを一つに集めた場合, 二つに集めた場合を表している。現状モデルの*は平均待ち時間 90 秒を大きく上回っている。

表 1 モデル比較別レジ稼働台数

λ (人/時)	300	270	240	210	180
現状モデル	7*	7	7	7	7
モデル 2(1) エンド型	6	6	5	5	4
モデル 2(1) センター型	6	6	5	5	4
モデル 2(2) エンド型	8	6	6	6	5
モデル 2(2) センター型	8	6	6	6	4
モデル 3(現状モデル型)	7	7	7	7	7
モデル 3(1) エンド型	6	6	5	4	4
モデル 3(1) センター型	6	6	5	4	4
モデル 3(2) エンド型	6	6	6	6	4
モデル 3(2) センター型	6	6	6	6	4
λ (人/時)	150	120	90	60	-
現状モデル	7	6	2	2	-
モデル 2(1) エンド型	4	3	2	2	-
モデル 2(1) センター型	4	3	2	2	-
モデル 2(2) エンド型	4	4	4	2	-
モデル 2(2) センター型	4	4	4	2	-
モデル 3(現状モデル型)	7	4	2	2	-
モデル 3(1) エンド型	3	3	2	2	-
モデル 3(1) センター型	3	3	2	2	-
モデル 3(2) エンド型	4	4	2	2	-
モデル 3(2) センター型	4	4	2	2	-

7 参考文献

- [1] CITIZEN 意識調査
<http://www.citizen.co.jp/research/time/20030528/index.html>
- [2] 加藤 菜美絵: 作業能力を考慮した人員配置問題を解くマルチエージェントモデルの構築
2006 年度群馬大学社会情報学部社会情報学科
- [3] 加藤豊・沢木勝茂・小和田正: 「OR 入門 意思決定の基礎」実教出版, 東京, 1984
- [4] 牧野都治: 「待ち行列の応用」森北出版, 東京, 1969
- [5] 宮沢政清: 「待ち行列の数理とその応用」牧野書店, 東京, 2006
- [6] 森村英典・大前義次: 「応用待ち行列理論」日科技連出版社, 東京, 1975
- [7] Sheldon M. Ross: *Introduction to Probability Models Sixth Edition* Academic Press; 6 版 (1997/2/17)
- [8] 鈴木武次: 「待ち行列」褒花房, 東京, 1972
- [9] 柳沢大地・友枝明保・木村紋子・西成活裕
歩行距離を考慮した待ち行列理論による待ち行列システムの解析
日本学術振興会 特別研究員 DCI (独) 科学技術振興機構 さきがけ