

# 支点が上下する倒立振り子の安定性について

2007MI232 高塚 俊直

指導教員：小藤 俊幸

## 1 はじめに

本研究の目的は上下する倒立振り子の安定性を調べることである。

運動方程式を線形化して、以下の2つの手法で調べる。

1. 直接、ルンゲ・クッタ法を用いて、数値計算で調べる
2. 力学系理論 [1] の手法を用いて、行列の固有値問題に帰着して調べる

最終的に上の2つの手法で調べた結果を比較する。

## 2 運動方程式

支点が上下する運動方程式 [3] は

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{g + \eta''(t)}{l_0} \sin\theta \quad (1)$$

と表される。

ここで、 $g$  は重力加速度  $g = 9.8(m/s^2)$  とする。

変数変換  $\varphi(t) = \pi - \theta(t)$

$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{d^2\varphi}{dt^2}$ ,  $\sin\theta = \sin(\pi - \theta) = \sin\varphi$  より、(1) は

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} = \frac{g + \eta''(t)}{l_0} \sin\varphi \quad (2)$$

と書き直される。さらに、 $\sin\varphi \approx \varphi$  により近似

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} = \frac{g + \eta''(t)}{l_0} \varphi \quad (3)$$

さらに、 $x(t) = \varphi(t)$ ,  $y(t) = \varphi'(t)$ ,  $q(t) = \frac{g + \eta''(t)}{l_0}$  とおくと、(3) は

$$\frac{dx}{dt} = y, \quad \frac{dy}{dt} = q(t)x \quad (4)$$

と書き直される。

## 3 ルンゲ・クッタ法

ここでは、常微分方程式の初期値問題

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x) \quad (t_0 \leq t \leq t_F), \quad x(t_0) = x_0 \quad (5)$$

の数値解法 [2] について述べる。未知変数  $x(t)$  は  $R^d$  に値をとる関数、 $f$  は  $[t_0, t_F] \times R^d$  から  $R^d$  への関数 (写像) である。

区間  $[t_0, t_F]$  を小区間に分割し、独立変数の離散点を

$$t_0 < t_1 < \dots < t_n < t_{n+1} < \dots < t_N = t_F$$

のようにとる。 $t_n$  をステップ点、間隔  $h_n = t_{n+1} - t_n$  をステップ幅と言う。不等間隔のステップ点を用いられる場合もあるが、簡便さもあって、等間隔のステップ点もよく使用される。以下では、ステップ幅は  $n$  によらない一定値  $h = (t_F - t_0)/N$  であるとする。

初期値問題の解  $x(t)$  について、第  $n$  ステップ点における値  $x(t_n)$  の近似値を  $x_n$  とするとき、近似値  $x_n$  ( $n = 1, 2, \dots$ ) を、何らかの構成的な手段により求める方法を、一般に、離散変数法 (discrete variable method) と言う。最も簡単な離散変数法は、オイラー法 (Euler method)

$$x_{n+1} = x_n + hf(t_n, x_n) \quad (6)$$

である。与えられた初期値  $x_0$  から、漸化式 (6) を用いて、順次  $x_1, x_2, \dots$  が計算される。

オイラー法は、理論的には重要であるが、近似精度が低いいため、計算の効率が悪い。実用的な計算では、ルンゲ・クッタ法 (Runge-Kutta method) と呼ばれる解法が使われることが多い。標準的なルンゲ・クッタ法 (古典的ルンゲ・クッタ法と呼ばれる) では、次のように4回の関数計算を行って、 $x_n$  から  $x_{n+1}$  を求める。

$$\begin{aligned} k_1 &= f(t_n, x_n) \\ k_2 &= f\left(t_n + \frac{h}{2}, x_n + \frac{h}{2}k_1\right) \\ k_3 &= f\left(t_n + \frac{h}{2}, x_n + \frac{h}{2}k_2\right) \\ k_4 &= f\left(t_n + h, x_n + hk_3\right) \\ x_{n+1} &= x_n + \frac{h}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) \end{aligned}$$

## 4 計算結果

ここではルンゲ・クッタ法を用いて、数値計算で調べた結果を図1と図2に示す。

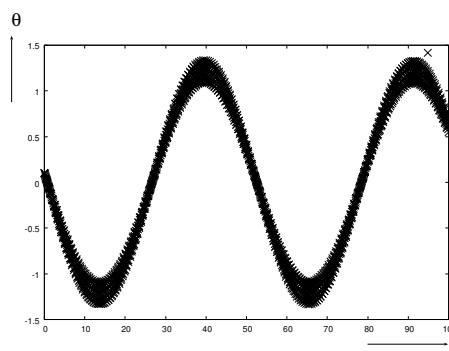


図1 周波数 14

図1より周波数 14 は収束すると分かる。

図2より周波数 13 は発散すると分かる。

これらの結果より周波数 14 以上は収束し、振り子は立っている状態 (安定) が続くと思われる。

また、周波数 13 以下は発散し、振り子がぐるぐる回っている状態 (不安定) が続くと思われる。

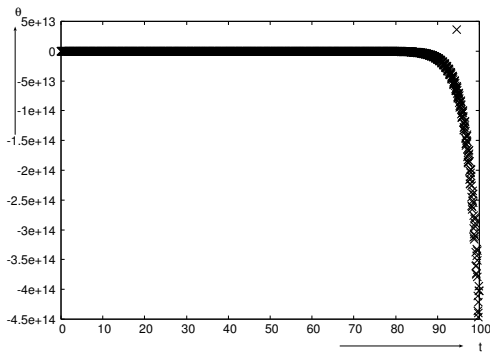


図2 周波数13

## 5 平衡解の安定性解析

ここでは、方程式(4)の平衡解  $x = y = 0$  の安定性について考える。

関数  $\eta''(t)$  の周期を  $\tau$  とする。ベクトル  $[\xi, \eta]^T \in R^2$  に対して、初期条件  $x(0) = \xi, y(0) = \eta$  をみたす(4)の解を  $x(t), y(t)$  とし、 $[\xi, \eta]^T$  に  $[x(\tau), y(\tau)]^T$  を対応させる  $R^2$  から  $R^2$  への写像を  $F$  とする。 $F$  は線形写像となる。実際、 $v_1 = [\xi_1, \eta_1]^T, v_2 = [\xi_2, \eta_2]^T$  に対して、 $x(0) = \xi_1, y(0) = \eta_1$  をみたす(4)の解を  $x_1(t), y_1(t)$  とし、 $x(0) = \xi_2, y(0) = \eta_2$  をみたす(4)の解を  $x_2(t), y_2(t)$  とすると、定数  $c_1, c_2$  に対して、 $x(0) = c_1 \xi_1 + c_2 \xi_2, y(0) = c_1 \eta_1 + c_2 \eta_2$  をみたす解は  $x(t) = c_1 x_1(t) + c_2 x_2(t), y(t) = c_1 y_1(t) + c_2 y_2(t)$  と表される。したがって、

$$F(c_1 v_1 + c_2 v_2) = c_1 F(v_1) + c_2 F(v_2) \quad (7)$$

が成り立つ。すなわち、 $F$  は線形写像である。

$F$  による  $[1, 0]^T$  の像を  $[a, c]^T$  とし、 $[0, 1]^T$  の像を  $[b, d]^T$  とすると、

$$F([\xi, \eta]^T) = A \begin{bmatrix} \xi \\ \eta \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \quad (8)$$

が成り立つ。

さらに、 $q(t)$  が周期  $\tau$  の周期関数であることから、 $\tau_n = n\tau$  ( $n = 0, 1, \dots$ ) とおくと、(4)の解  $x(t), y(t)$  について、

$$\begin{bmatrix} x(\tau_{n+1}) \\ y(\tau_{n+1}) \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} x(\tau_n) \\ y(\tau_n) \end{bmatrix} \quad (n = 0, 1, \dots) \quad (9)$$

が成り立ち、これより、

$$\begin{bmatrix} x(\tau_n) \\ y(\tau_n) \end{bmatrix} = A^n \begin{bmatrix} x(0) \\ y(0) \end{bmatrix} \quad (n = 1, 2, \dots) \quad (10)$$

が得られる。一方、行列  $A$  の固有値  $\lambda_1, \lambda_2$  が相異なるとき、正則行列  $T$  が存在して、

$$A^n = T \begin{bmatrix} \lambda_1^n & 0 \\ 0 & \lambda_2^n \end{bmatrix} T^{-1} \quad (11)$$

と表される。したがって、(4)の解の漸近的な挙動は行列  $A$  の固有値を調べることによって解析される。

## 6 解析結果

- 周波数14の場合

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.3512 & 0.4543 \\ -0.9287 & 1.6454 \end{bmatrix} \quad (12)$$

となる。

これを Maxima で  $\lambda_1, \lambda_2$  を求める。

$$\lambda_1 = 0.9983 - 0.05697i, \lambda_2 = 0.9983 + 0.05697i \quad (13)$$

よって、 $|\lambda_1| \leq 1, |\lambda_2| \leq 1$  より収束する。

- 周波数13の場合

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.3663 & 0.4919 \\ -0.7939 & 1.663 \end{bmatrix} \quad (14)$$

となる。

これを Maxima で  $\lambda_1, \lambda_2$  を求める。

$$\lambda_1 = 0.8419, \lambda_2 = 1.1877 \quad (15)$$

よって  $|\lambda_1| \leq 1, |\lambda_2| \geq 1$  より発散する。

さらに詳しく研究した結果、周波数13.4以上は収束し、周波数13.3以下は発散するという結果がでた。

これより行列式で数学的に解析した場合、周波数13.4以上は収束し、安定するという結果がでた。また周波数13.3以下は発散し、不安定な状態が続くという結果がでた。

## 7 おわりに

今回の研究で直接ルンゲ・クッタ法を用いて、数値計算した場合、周波数は14以上の場合には安定、周波数が13以下の場合には不安定になると分かった。

力学系理論の手法を用いて、行列の固有値問題に帰着して調べた場合、周波数は13.4以上の場合には安定、周波数が13.3以下の場合には不安定であると分かった。

この結果から直接ルンゲ・クッタ法を用いて、数値計算した場合と力学系理論の手法を用いて、行列の固有値問題に帰着して調べた場合はほぼ同じ結果になるということが分かった。

## 参考文献

- [1] V. I. アーノルド (安藤韶一・蟹江幸博・丹羽敏雄 訳): 『古典力学の数学的方法』, 岩波書店, 東京, 1980. (第5章「振動」)
- [2] 三井斌友・小藤俊幸: 『常微分方程式の解法』, 共立出版, 東京, 2000. (第6章「ルンゲ・クッタ法」)
- [3] 戸田盛和: 『一般力学30講』, 朝倉書店, 1994. (第11講「支点の上下する振り子」)