倒立振り子の安定性に関する数値計算

2007MI226 鈴木康平
指導教員：小藤俊幸

1 はじめに

倒立振り子は，その名の示すように，普通の振り子（下向き）を逆立ち（倒立）させたものである．本研究では，さらに支点を上下させた倒立振り子をモデルとして扱い，その安定性に関して数値計算を行っていく．また，その過程でシミュレーションを行う際，研究室で学んだルンゲ・クッタ法を用いる．

2 モデルの定式化

まずは取り扱うモデルを定式化する [1].

棒の長さが一定値 l_0 で，支点が y 軸上を上下する下図のような振り子の運動を考える．

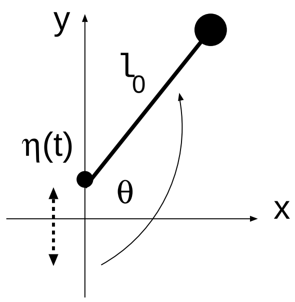

図 1

おもりの位置座標 $x,\, y$ は，棒の垂直下向きからの角度 θ と支点の y 座標 $\eta(t)$ を用いて，

$$x = l_0\,\sin\theta, \quad y = -l_0\,\cos\theta + \eta(t) \tag{1}$$

のように表される．

(1) より

$$\begin{aligned}
\frac{dx}{dt} &= l_0\,\cos\theta\,\frac{d\theta}{dt}\\
\frac{d^2x}{dt^2} &= -l_0\,\sin\theta\,\frac{d\theta}{dt} + l_0\,\cos\theta\,\frac{d^2\theta}{dt^2}\\
\frac{dy}{dt} &= l_0\,\sin\theta\,\frac{d\theta}{dt} + \eta'(t)\\
\frac{d^2y}{dt^2} &= l_0\,\cos\theta\,\frac{d\theta}{dt} + l_0\,\sin\theta\,\frac{d^2\theta}{dt^2} + \eta''(t)
\end{aligned}$$

が成り立つ．

したがって，運動方程式 $m\dfrac{d^2x}{dt^2} = 0,\ m\dfrac{d^2y}{dt^2} = -mg$ (m はおもりの質量) を m で割ったものは，

$$\begin{aligned}
-l_0\,\sin\theta\,\frac{d\theta}{dt} + l_0\,\cos\theta\,\frac{d^2\theta}{dt^2} &= 0\\
l_0\,\cos\theta\,\frac{d\theta}{dt} + l_0\,\sin\theta\,\frac{d^2\theta}{dt^2} &= -g - \eta''(t)
\end{aligned}$$

のようになり，(第１式)$\times\cos\theta$ + (第２式)$\times\sin\theta$ より，運動方程式は

$$\boxed{\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{g+\eta''(t)}{l_0}\,\sin\theta} \tag{2}$$

となる．ここで，g は重力加速度 ($g = 9.8$ (m/s^2) とする）である．

3 ルンゲ・クッタ法

次にルンゲ・クッタ法について説明する [2].

ここでは，常微分方程式の初期値問題

$$\frac{dx}{dt} = f(t,\,x) \quad (t_0 \le t \le t_F), \quad x(t_0) = x_0 \tag{3}$$

の数値解法について述べる．未知変数 $x(t)$ は $\mathbb{R}^d$ に値をとる関数，f は $[t_0, t_F] \times \mathbb{R}^d$ から $\mathbb{R}^d$ への関数 (写像) である．

区間 $[t_0, t_F]$ を小区間に分割し，独立変数の離散点を

$$t_0 < t_1 < \cdots < t_n < t_{n+1} < \cdots < t_N = t_F$$

のようにとる．t_n をステップ点，間隔 $h_n = t_{n+1} - t_n$ をステップ幅と言う．不等間隔のステップ点が用いられる場合もあるが，簡便さもあって，等間隔のステップ点もよく使用される．以下では，ステップ幅は n によらない一定値 $h = (t_F - t_0)/N$ であるとする．

初期値問題の解 $x(t)$ について，第 n ステップ点における値 $x(t_n)$ の近似値を x_n とするとき，近似値 x_n (n = 1, 2, ...) を，何らかの構成的な手段により求める方法を，一般に，離散変数法 (discrete variable method) と言う．最も簡単な離散変数法は，オイラー法 (Euler method)

$$x_{n+1} = x_n + hf(t_n,\,x_n) \tag{4}$$

である．与えられた初期値 x_0 から，漸化式 (4) を用いて，順次 $x_1, x_2, \ldots$ が計算される．

オイラー法は，理論的には重要であるが，近似精度が低いため，計算の効率が悪い．実用的な計算では，ルンゲ・クッタ法 (Runge-Kutta method) と呼ばれる解法が使われることが多い．標準的なルンゲ・クッタ法（古典的ルンゲ・クッタ法と呼ばれる）では，次のように４回の関数計算を行って，x_n から x_{n+1} を求める．

$$\begin{aligned}
k_1 &= f(t_n, x_n)\\
k_2 &= f\Big(t_n + \frac{h}{2},\, x_n + \frac{h}{2}\,k_1\Big)\\
k_3 &= f\Big(t_n + \frac{h}{2},\, x_n + \frac{h}{2}\,k_2\Big)\\
k_4 &= f\Big(t_n + h,\, x_n + hk_3\Big)\\
x_{n+1} &= x_n \ + \ \frac{h}{6}\Big(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4\Big)
\end{aligned}$$

4　実行結果

$l_0 = 9.8$ (m) とし，支点の位置座標は

$$\eta(t) = \sin(\omega t) \quad (\omega \text{ は実数}) \tag{5}$$

のように変化するものとする．初期条件

$$\theta(0) = 3.04, \quad \theta'(0) = 0.0 \tag{6}$$

をみたす (2) の解 (初期時刻では，ほぼ垂直に立って静止している振り子の運動) の様子は角周波数 ω の値によって変化するので，その軌跡を図に表す．

また，今回は $C++$ 言語を用いたプログラミングによってシミュレーションを行っている [3]．

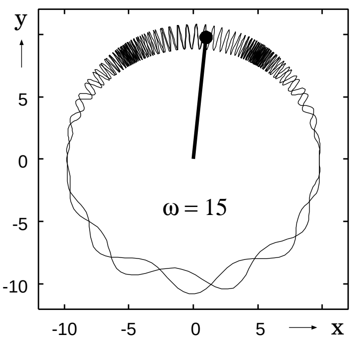

図 2　$\omega = 15.0$, h=1/20 のとき

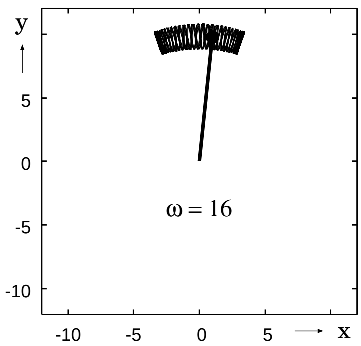

図 3　$\omega = 16.0$, h=1/20 のとき

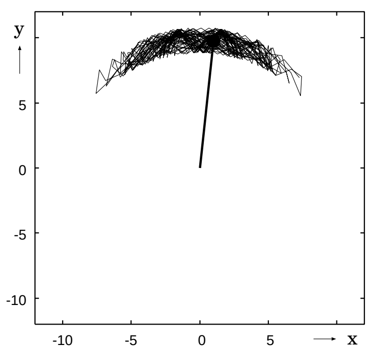

図 4　$\omega = 86.0$, h=1/20 のとき

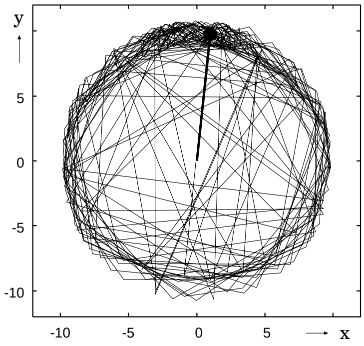

図 5　$\omega = 87.0$, h=1/20 のとき

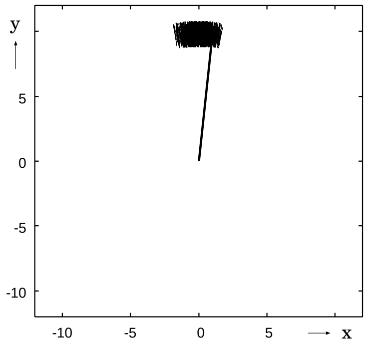

図 6　$\omega = 87.0$, h=1/40 のとき

5　おわりに

5.1　結果の考察

角周波数 ω の値を 1.0〜99.0 まで変化させて実行させた．

角周波数 $\omega = 1.0$〜15.0 のときに振り子は回転してしまい不安定，角周波数 $\omega = 16.0$ のときに振り子は回転することなく安定する．

ここから ω の値が変化しても振り子は回転することなく安定する．

しかし，角周波数 $\omega = 87.0$ のとき振り子は回転してしまい不安定となり，ここから，角周波数 $\omega = 99.0$ まで不安定となる．

ただし，後半の不安定性はステップ幅が大きいことによるものである．実際，ステップ幅の値を小さくとることで角周波数 $\omega = 87.0$ のときでも安定となる．これによりステップ幅が十分小さいとき，角周波数 ω の値が大きくなると振り子は安定となる，と考えられる．

参考文献

[1] 戸田盛和：『一般力学３０講』，朝倉書店，1994.（第１１講「支点の上下する振り子」）

[2] 三井斌友・小藤俊幸：『常微分方程式の解法』，共立出版，東京，2000.（第６章「ルンゲ・クッタ法」）

[3] 条井康孝：『猫でもわかる Windows プログラミング第２版』，ソフトバンクパブリッシング株式会社，東京，2003.