直観主義論理と古典論理

2007MI218 白川琢茂

指導教員：佐々木克巳

1　はじめに

本研究の目的は、小野 [1] にしたがって、直観主義論理と古典論理の理解を深めることである。具体的には、古典論理では証明可能であるが、直観主義論理では証明不可能な論理式の例を挙げる。

本稿で扱う論理式の定義は以下のとおりである。

定義 1.1　論理式
(1) それぞれの命題変数は論理式である。
(2) A,B がともに論理式ならば、$(A \wedge B)$,$(A \vee B)$, $(A \supset B)$,$(\neg A)$ はいずれも論理式である。

古典論理と直観主義論理は、それぞれ小野 [1] の **LK** と **LJ** を用いる。**LJ** に対して小野 [1] からは次の定理がわかる。

定理 1.2　任意の論理式 A に対し、A が **LJ** で証明不可能となるための必要十分条件は A があるクリプキ・モデルで偽となることである。

すなわち、論理式 A が直観主義論理で証明不可能であることを示すには、A を偽にするクリプキ・モデルを与えればよいことになる。

卒業論文では、クリプキ・モデルを導入し、7 つの論理式をあげ、それぞれを偽にするクリプキ・モデルを与えて、その 7 つの論理式が **LK** で証明可能であることを示した。

本稿では、次の 2 節でクリプキ・モデルを導入し、3 節で卒業論文で扱った 7 つの論理式のうちの 4 つに対して、それぞれを偽にするクリプキ・モデルを与える。

2　クリプキ・モデル

この節では、小野 [1] にしたがって、クリプキ・モデルを導入する。

定義 4.1 (クリプキ・フレーム) 空でない集合 M と M 上の順序関係 $\leq$ の対 $(M, \leq)$ クリプキ・フレームという。M の要素を可能世界という。

定義 4.2 集合 M の部分集合 U が遺伝的であるとは、$x, y \in M$ に対し,
(1)　$x \in U$ かつ $x \leq y$ ならば $y \in U$
が成り立つこととする。

定義 4.3 (クリプキ・モデル)$(M, \leq)$ をフレームとする。また V を各命題変数 p に対し $V(p) \subseteq M$ となるような写像とする。このとき、V をフレーム $(M, \leq)$ 上の付値ということ。そして、この 3 つの組 $(M, \leq, V)$ をクリプキ・モデルという。与えられたクリプキ・モデル $(M, \leq, V)$ に対し、M の要素と論理式の間の二項関係 $\models$ をつぎのように帰納的に定義する。

(1)$a \models p \Leftrightarrow a \in V(p)$($p$ は命題変数)
(2)$a \models A \wedge B \Leftrightarrow a \models A$ かつ $a \models B$
(3)$a \models A \vee B \Leftrightarrow a \models A$ または $a \models B$
(4)$a \models A \supset B \Leftrightarrow a \leq b$ となるすべての b に対し、$b \not\models A$ または $b \models B$
(5)$a \models \neg A \Leftrightarrow a \leq b$ となるすべての b に対し、$b \not\models A$

$a \models A$ であるとき、「(可能世界)a で A は真である」という。「$a \models A$ でない」ことは $a \not\models A$ とあらわす。関係 $\models$ は付値 V から一意的に定まるので、今後は V と $\models$ を同一視して、$\models$ のことを付値といったり、$(M, \leq, \models)$ のことをクリプキ・モデルといったりする。上の定義 4.3 の (1) よりこのようないい方をしても混乱は生じない。

また、上の定義より、次が成り立つ。
(6)$a \not\models A \wedge B \Leftrightarrow a \not\models A$ または $a \not\models B$
(7)$a \not\models A \vee B \Leftrightarrow a \not\models A$ かつ $a \not\models B$
(8)$a \not\models A \supset B \Leftrightarrow a \leq b$ となる存在するある b に対し、$b \models A$ かつ $b \not\models B$
(9)$a \not\models \neg A \Leftrightarrow a \leq b$ となる存在するある b に対し、$b \models A$

また、クリプキ・フレーム $(M, \leq)$ は順序集合なので、ハッセ図で表現できる。

3　クリプキモデルで偽になる論理式

この節では、この 4 つの論理式
- $(\neg p \supset \neg q) \supset (q \supset p)$ (小野 [1] 問 5.6 d)
- $\neg\neg p \supset p$
- $\neg\neg p \vee (\neg\neg p \supset p)$
- $(\neg\neg p \supset p) \supset (p \vee \neg p)$ (小野 [1] 問 5.6 c)

に対し、それを偽にするクリプキ・モデルを与える。
- $(\neg p \supset \neg q) \supset (q \supset p)$ は次のクリプキ・モデル $(M, \leq, \models)$ で偽になる。

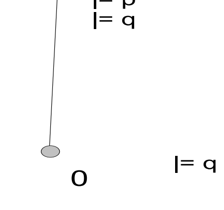

図 1　$(\neg p \supset \neg q) \supset (q \supset p)$

(証明)

(1)	$b \models p$	$\because$ 定義
(2)	$b \leq b$	$\because$ 定義
(3)	$b \not\models \neg p$	$\because$(1),(2)
(4)	$0 \leq b$	$\because$ 定義
(5)	$0 \not\models \neg p$	$\because$(1),(4)
(6)	$0 \leq x$ を満たす x は $0, b$ のみ。	$\because$ 定義
(7)	$0 \models \neg p \supset \neg q$	$\because$(3),(5),(6)
(8)	$0 \models q$	$\because$ 定義
(9)	$0 \not\models p$	$\because$ 定義
(10)	$0 \leq 0$	$\because$ 定義
(11)	$0 \not\models q \supset p$	$\because$(8),(9),(10)
(12)	$0 \not\models (\neg p \supset \neg q) \supset (q \supset p)$	$\because$(7),(10),(11)

- $\neg\neg p \supset p$ は次のクリプキ・モデル $(M, \leq, \models)$ で偽になる。

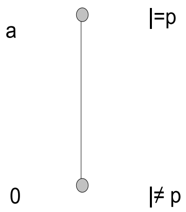

図 2 $\neg\neg p \supset p$

(証明)

(1)	$0 \leq a$	$\because$ 定義
(2)	$a \models p$	$\because$ 定義
(3)	$0 \not\models \neg p$	$\because$(1),(2)
(4)	$a \leq a$	$\because$ 定義
(5)	$a \not\models \neg p$	$\because$(2),(4)
(6)	$0 \leq x$ を満たす x は $0, a$ のみ。	$\because$ 定義
(7)	$0 \models \neg\neg p$	$\because$(3),(5),(6)
(8)	$0 \models p$	$\because$ 定義
(9)	$0 \leq 0$	$\because$ 定義
(10)	$0 \not\models \neg\neg p \supset p$	$\because$(7),(8),(9)

- $\neg\neg p \vee (\neg\neg p \supset p)$ は次のクリプキ・モデル $(M, \leq, \models)$ で偽になる。

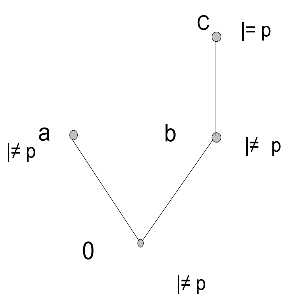

図 3 $\neg\neg p \vee (\neg\neg p \supset p)$

(証明)

(1)	$a \not\models p$	$\because$ 定義
(2)	$a \leq x$ を満たす x は a のみ	$\because$ 定義
(3)	$a \models \neg p$	$\because$(1),(2)
(4)	$0 \leq a$	$\because$ 定義
(5)	$0 \not\models \neg\neg p$	$\because$(3),(4)
(6)	$b \not\models p$	$\because$ 定義
(7)	$c \models p$	$\because$ 定義
(8)	$c \leq c$	$\because$ 定義
(9)	$c \not\models \neg p$	$\because$(7),(8)
(10)	$b \leq c$	$\because$ 定義
(11)	$b \not\models \neg p$	$\because$(7),(10)
(12)	$b \leq x$ を満たす x は b, c のみ	$\because$ 定義
(13)	$b \models \neg\neg p$	$\because$(9),(11),(12)
(14)	$0 \leq b$	$\because$ 定義
(15)	$0 \not\models \neg\neg p \supset p$	$\because$(6),(13),(14)
(16)	$0 \not\models \neg\neg p \vee (\neg\neg p \supset p)$	$\because$(5),(15)

- $(\neg\neg p \supset p) \supset (p \vee \neg p)$ は次のクリプキ・モデル $(M, \leq, \models)$ で偽になる。

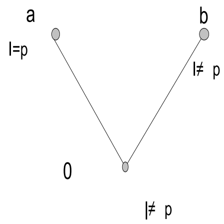

図 4 $(\neg\neg p \supset p) \supset (p \vee \neg p)$

(証明)

(1)	$0 \leq a$	$\because$ 定義
(2)	$a \models p$	$\because$ 定義
(3)	$0 \not\models \neg p$	$\because$(1),(2)
(4)	$0 \not\models p$	$\because$ 定義
(5)	$0 \not\models p \vee \neg p$	$\because$(3),(4)
(6)	$0 \leq b$	$\because$ 定義
(7)	$b \not\models p$	$\because$ 定義
(8)	$b \leq x$ を満たす x は b のみ	$\because$ 定義
(9)	$b \models \neg p$	$\because$(6),(7),(8)
(10)	$0 \leq b$	$\because$ 定義
(11)	$0 \not\models \neg\neg p$	$\because$(9),(10)
(12)	$b \leq b$	$\because$ 定義
(13)	$b \not\models \neg\neg p$	$\because$(9),(12)
(14)	$0 \leq x$ を満たす x は $0, a, b$ のみ	$\because$ 定義
(15)	$0 \models (\neg\neg p \supset p)$	$\because$(2),(11),(13),(14)
(16)	$0 \leq 0$	$\because$ 定義
(17)	$0 \not\models (\neg\neg p \supset p) \supset (p \vee \neg p)$	$\because$(5),(15)(16)

参考文献

[1] 小野寛晰 :『情報科学における論理』. 日本評論社，東京，1994.