人工衛星のフォーメーション形成・再構成

2007MI095 片山竜二　2008MI060 飯田研太
指導教員：市川　朗

1　はじめに

円軌道上の主衛星とその近傍の従衛星の相対運動の方程式は，時不変非線形微分方程式で与えられる．原点で線形化した方程式は Hill-Clohessy-Wiltshire 方程式とよばれ，軌道面内の運動は楕円で表される周期解をもつ．軌道面外の運動は単振動の方程式により表される．本研究では軌道面内運動に関して，1 入力にした場合の周期解を用いた人工衛星のフォーメーション形成・再構成問題を定式化する．ここでの評価関数は燃料消費を表す総速度変化とする. これまでの研究で，面内運動の最適インパルス制御および最適パルス制御は飛行方向の推力のみにより実現されることが知られている．そこで 1 推力のみの制御系の可制御性を考察する．さらにフィードバックにより最適制御の性能にどれだけ近づくことができるか検討する.

2　相対運動の方程式

半径 R_0 の円軌道上の主衛星とその近傍の従衛星の相対運動を考えるため，主衛星の重心を原点とする図 1 の回転座標系 $o-\{\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}\}$ を考える．このとき相対位置ベクトルを $\boldsymbol{r}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}$ とすると，運動方程式より

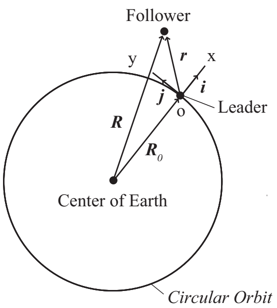

図 1　円軌道上の主衛星

$$
\begin{aligned}
\ddot{x} &= 2n\dot{y}+n^2(R_0+x)-\frac{\mu}{R^3}(R_0+x)+u_x \\
\ddot{y} &= -2n\dot{x}+n^2y-\frac{\mu}{R^3}y+u_y \\
\ddot{z} &= -\frac{\mu}{R^3}z+u_z
\end{aligned}
\tag{1}
$$

が得られる．ここで $[u_x\ u_y\ u_z]^T=\boldsymbol{u}$ は従衛星に働く推力，$R=[(R_0+x)^2+y^2+z^2]^{1/2}$ である．この方程式を原点 $x=y=z=0$ で線形化すると

$$
\begin{aligned}
\ddot{x}-2n\dot{y}-3n^2x &= u_x \\
\ddot{y}+2n\dot{x} &= u_y \\
\ddot{z}+n^2z &= u_z
\end{aligned}
\tag{2}
$$

が得られる．この方程式は Hill-Clohessy-Wiltshire (HCW) 方程式とよばれる．推力を $\boldsymbol{u}=0$，初期値を $[x_0\ y_0\ \dot{x}_0\ \dot{y}_0]^T$ とする面内運動の解は

$$
\begin{aligned}
x(t) &= 4x_0+2\dot{y}_0/n-(3x_0+2\dot{y}_0/n)\cos nt+(\dot{x}_0/n)\sin nt \\
y(t) &= y_0-2\dot{x}_0/n+(2\dot{x}_0/n)\cos nt+(6x_0+4\dot{y}_0/n)\sin nt \\
&\qquad -(6nx_0+3\dot{y}_0)t \qquad (3) \\
\dot{x}(t) &= \dot{x}_0\cos nt+(3nx_0+2\dot{y}_0)\sin nt \\
\dot{y}(t) &= (6nx_0+4\dot{y}_0)\cos nt-2\dot{x}_0\sin nt-(6nx_0+3\dot{y}_0)
\end{aligned}
$$

で与えられる．初期値を $[z_0\ \dot{z}_0]^T$ とする面外運動の解は

$$
\begin{aligned}
z(t) &= z_0\cos nt+(\dot{z}_0/n)\sin nt \\
\dot{z}(t) &= -nz_0\sin nt+\dot{z}_0\cos nt
\end{aligned}
\tag{4}
$$

であり，周期解となる．上の解をパラメータ表現すると

$$
\begin{aligned}
x(t) &= 2c+a\cos(nt+\alpha) \\
y(t) &= d-3nct-2a\sin(nt+\alpha) \\
z(t) &= b\cos(nt+\beta)
\end{aligned}
\tag{5}
$$

となる. ここで

$$
\begin{aligned}
&a=\left[(3x_0+2\dot{y}_0/n)^2+(\dot{x}_0/n)^2\right]^{1/2},\ c=2x_0+\dot{y}_0/n \\
&d=y_0-2\dot{x}_0/n,\ \sin\alpha=-\dot{x}_0/na \\
&\cos\alpha=-\left(3x_0+2\dot{y}_0/n\right)/a,\ b=[z_0^2+(\dot{z}_0/n)^2]^{1/2} \\
&\cos\beta=z_0/b,\ \sin\beta=-\dot{z}_0/nb
\end{aligned}
\tag{6}
$$

である. 面内運動は $c=2x_0+\dot{y}_0/n=0$ のとき周期解となり，この条件を CW 条件という.

(2) の状態方程式は

$$
\dot{\boldsymbol{x}}=A\boldsymbol{x}+B\boldsymbol{u},\ \boldsymbol{x}(0)=\boldsymbol{x}_0 \tag{7}
$$

となる. ここで

$$
A=\begin{bmatrix}
0&0&1&0&0&0\\
0&0&0&1&0&0\\
3n^2&0&0&2n&0&0\\
0&0&-2n&0&0&0\\
0&0&0&0&0&1\\
0&0&0&0&-n^2&0
\end{bmatrix},\quad
B=\begin{bmatrix}
0&0&0\\
0&0&0\\
1&0&0\\
0&1&0\\
0&0&0\\
0&0&1
\end{bmatrix}
$$

である. パラメータ $(a,c,d,\alpha;b,\beta)$ により表される (7) の解を $\gamma^H=(a,c,d,\alpha;b,\beta)$ と表す．$c=0$ のときこの解は周期軌道となり $\gamma^H=(a,d;b)$ と表す．フィードバック制御によるフォーメーション形成問題とは，(7) の解を与えられた周期軌道 $\gamma_f^H=(a_f,d_f;b_f)$ に漸近的に追従させることである．このときの評価関数は，制御に使う推力の絶対積分であり，これは消費燃料に比例する，特に従衛

星の初期軌道が周期軌道であるときは，フォーメーション再構成問題となる．文献 [3] では，有限回のインパルス入力により速度を変化させ，最終インパルスのあと (7) の軌道を周期軌道 $\gamma_f^H=(a_f,d_f;b_f)$ に一致させる問題が考察されている．評価関数はインパルスの大きさの総和であり，通称 ΔV として知られている．面内運動に関しては３インパルスの最適解が得られており，最適制御は u_y のみを用い，その ΔV は

$$\Delta V_i^*=\frac{n}{2}|a_f-a_0| \tag{8}$$

となる [2, 3]．面外運動では，１インパルスの最適解が得られている．同様に一定値入力のパルスによるフォーメーションにおいても，面内運動に関しては３パルスの最適解が得られている．最適制御は u_y のみを用い、その ΔV は

$$\Delta V_p^*=\frac{n^2\tau}{4\sin\frac{n\tau}{2}}|a_f-a_0| \tag{9}$$

となる [4]．ここで τ はパルス幅である．$\tau\to 0$ とすると ΔV_p^* はインパルスの ΔV_i^* に収束する．フィードバックによる制御では，評価関数（総速度変化）が ΔV_i^* に近い準最適制御を求めることが課題となる．

１入力 u_x によるフォーメーション再構成問題は，２インパルス，２パルスの最適制御が得られておりその ΔV は

$$\begin{aligned}\Delta V_{xi}^*&=n|a_f-a_0|,\\ \Delta V_{xp}^*&=\frac{n^2\tau}{2\sin\frac{n\tau}{2}}|a_f-a_0|\end{aligned} \tag{10}$$

であり，(8), (9) の２倍となっている．

3　面内運動：１入力による制御

面内運動のシステムは

$$\dot{\boldsymbol{x}}=\begin{bmatrix}0&0&1&0\\0&0&0&1\\3n^2&0&0&2n\\0&0&-2n&0\end{bmatrix}\boldsymbol{x}+\begin{bmatrix}0&0\\0&0\\1&0\\0&1\end{bmatrix}\boldsymbol{u} \tag{11}$$

となる. このシステムの可制御性行列の階数は４であり可制御である．u_y のみの１入力のとき，制御行列は $b_y=[0\ 0\ 0\ 1]^T$ となり，可制御である．u_x のみの１入力のときは $b_x=[0\ 0\ 1\ 0]^T$ となり，可制御性行列の階数は３であり不可制御となる．このとき可制御部分空間は

$$\begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&-2n\\1&0&-n^2\\0&-2n&0\end{bmatrix}$$

の列ベクトルの張る空間となる．この部分空間は $c=2x_0+\dot{y}_0/n=0$ であり，軌道が周期解となる部分空間である．従って１入力 u_x によるフォーメーション再構成問題は意味をもつことが分かる．

$$T^{-1}=\begin{bmatrix}0&1&0&2n\\1&0&0&0\\0&0&1&0\\0&-2n&0&1\end{bmatrix}$$

とおき，変数変換 $\bar{\boldsymbol{x}}=T^{-1}\boldsymbol{x}$ を行うと面内運動の状態方程式は

$$\dot{\bar{\boldsymbol{x}}}=\bar{A}_1\bar{\boldsymbol{x}}+\bar{b}_xu_x \tag{12}$$

となる．ここで

$$\begin{aligned}\bar{A}_1=TA_1T^{-1}&=\begin{bmatrix}\bar{A}_c&\bar{A}_{12}\\0&\bar{A}_{\bar{c}}\end{bmatrix}\\&=\begin{bmatrix}0&-2n&0&1\\0&0&1&0\\0&-n^2&0&n+n^3\\0&0&0&0\end{bmatrix}\end{aligned}$$

$$\bar{b}_x=Tb_x=\begin{bmatrix}\bar{b}_c\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\1\\0\end{bmatrix}$$

である．状態の第 4 成分が不可制御となる．

4　フォーメーション問題の解

HCW システム (7) に対して目標軌道 $\gamma_f^H=(a_f,d_f;b_f)$ が与えられたとする．このとき軌道上に仮想の衛星をおき，その方程式を

$$\dot{\boldsymbol{x}}_f=A\boldsymbol{x}_f,\ \boldsymbol{x}_f(0)=\boldsymbol{x}_{f0} \tag{13}$$

とおく．このとき軌道の誤差 $\boldsymbol{e}=\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_f$ は

$$\dot{\boldsymbol{e}}=A\boldsymbol{e}+B\boldsymbol{u},\ \boldsymbol{e}(0)=\boldsymbol{e}_0 \tag{14}$$

となる．目標軌道に追従させるためにはシステム (14) を安定化すればよい．安定化フィードバックを最適レギュレータのリッカチ方程式

$$A^TX+XA+Q-XBR^{-1}B^TX=0 \tag{15}$$

より

$$\boldsymbol{u}=-R^{-1}B^TX\boldsymbol{e} \tag{16}$$

とする．

u_y,u_z によるフォーメーション再構成問題を考える．

$$\boldsymbol{B}_1=\begin{bmatrix}0&0\\0&0\\0&0\\1&0\\0&0\\0&1\end{bmatrix}$$

として, リッカチ方程式の解を計算すると

$$\boldsymbol{X}=diag(\boldsymbol{X}_1,\boldsymbol{X}_2)$$

$$
\boldsymbol{X}_1 = \begin{bmatrix} 36.5859 & -6.2841 & 17.2448 & 10.2210 \\ -6.2841 & 2.7970 & -3.4070 & -1,0000 \\ 17.2448 & -3.4070 & 9.2146 & 4.2841 \\ 10.2210 & -1.0000 & 4.2841 & 4.0170 \end{bmatrix}
$$

$$
\boldsymbol{X}_2 = \begin{bmatrix} 1.9123 & 0.4142 \\ 0.4142 & 1.3522 \end{bmatrix}
$$

この時のフィードバックゲイン K は

$$
\boldsymbol{K} = diag(\boldsymbol{K}_1, \boldsymbol{K}_2)
$$

$$
\boldsymbol{K}_1 = \begin{bmatrix} 10.22100 & -1.0000 & 4.2841 & 4.0170 \end{bmatrix}
$$

$$
\boldsymbol{K}_2 = \begin{bmatrix} 0.4142 & 1.3522 \end{bmatrix}
$$

となる. このフィードバックによるシミュレーション結果を図 2, 図 3 に示す.

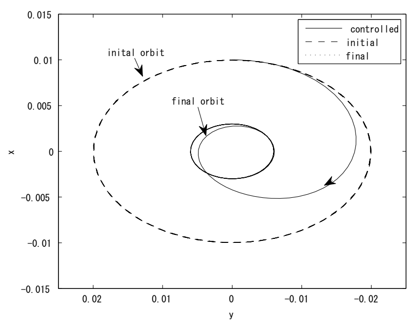

図 2　u_y による制御：面内運動

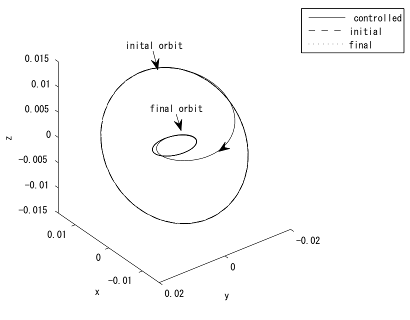

図 3　u_y,u_z による制御：3 次元 (q=1)

重み Q=qI の q を 1 から 0.01 ずつ下げたときの L_1-ノルムのシミュレーション結果を図 4 に示す.

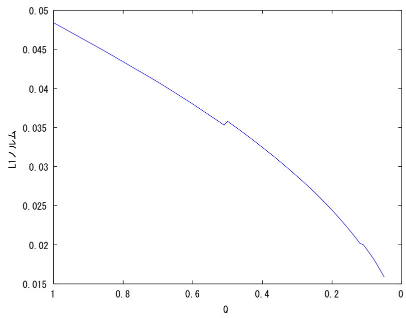

図 4　u_y の L_1-ノルム

HCW システムでは q を下げていくとフィードバックの L_2-ノルムは 0 に減少していくことが知られている.[2] この性質をエネルギー零収束原点可制御性 (NCVE) という.L_2-ノルムは q とともに単調に減少していくことが分かった.u_y の L_1-ノルムも L_2-ノルムと同様に q とともに減少することが分かる.

目標軌道に 5 周期以内で収束させるときの q の最小値は q=0.052 であり, その時のシミュレーション結果を図 5 に示す.

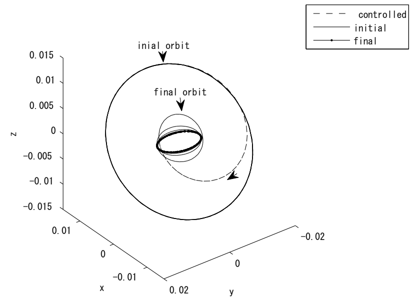

図 5　u_y,u_z による制御:3 次元 (Q=0.052)

次に u_x,u_z によるフォーメーション再構成問題を考える. このとき制御行列は

$$
\boldsymbol{B}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}
$$

である. 可制御な部分システムのリッカチ方程式

$$
\bar{A}_c^T X + X_c \bar{A}_c + Q_c - X b_c r^{-1} b_c^T X = 0 \tag{17}
$$

によりフィードバック

$$
u_x = [-r^{-1} b_c^T X_c \ 0] T^{-1} \boldsymbol{e}_1 \tag{18}
$$

を設計する．ここで $\boldsymbol{e}_1$ は面内運動の誤差である. リッカチ方程式の解を計算すると

$$
\boldsymbol{X} = diag(\boldsymbol{X}_1, \boldsymbol{X}_2)
$$

$$
\boldsymbol{X}_1 = \begin{bmatrix} 1.7071 & -2.4142 & -1.0000 \\ -2.4142 & 6.2426 & 2.4142 \\ -1.0000 & 2.4142 & 2.4142 \end{bmatrix}
$$

$$
\boldsymbol{X}_2 = \begin{bmatrix} 1.9123 & 0.4142 \\ 0.4142 & 1.3522 \end{bmatrix}
$$

である. この時のフィードバックゲイン K は

$$
\boldsymbol{K} = diag(\boldsymbol{K}_1, \boldsymbol{K}_2)
$$

$$
\boldsymbol{K}_1 = \begin{bmatrix} -1.0000 & 2.4142 & 2.4142 & 0 \end{bmatrix} T^{-1}
$$

$$
\boldsymbol{K}_2 = \begin{bmatrix} 0.4142 & 1.3522 \end{bmatrix}
$$

となる. このフィードバックによるシミュレーション結果を図 6 に示す.

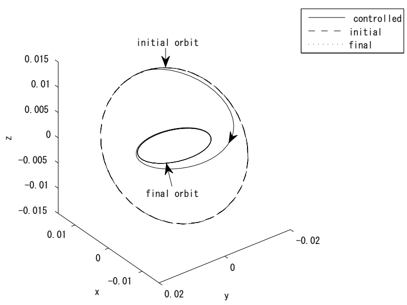

図 6 u_x,u_z による制御：3 次元 (q=1)

重み Q=qI の q を 1 から 0.01 ずつ下げたときの L_1-ノルムのシミュレーション結果を図 7 に示す.

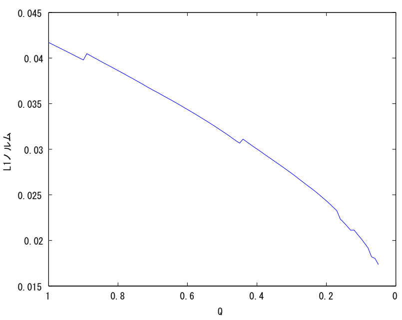

図 7 u_x の L_1-ノルム

目標軌道に 5 周期以内で収束させるときの q の最小値は q=0.049 であり, その時のシミュレーション結果を図 8 に示す.

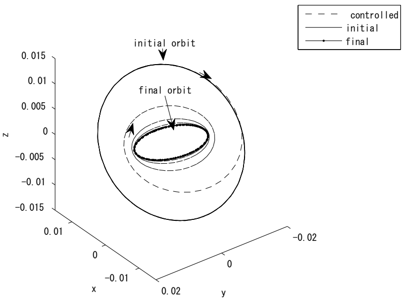

図 8 u_x,u_z による制御:3 次元 (q=0.049)

5 おわりに

本研究では, 衛星の進行方向の入力と面外運動に対する入力によるフォーメーション再構成問題を考察した. リッカチ方程式の状態に関する重み q を下げることで, HCW システムではフィードバックの L_2-ノルムは 0 に減少していき, L_1-ノルムは q とともに単調に減少することを確認した. 5 周期以内に収束させるための最小な重みは q=0.052 であった. このときの燃費を表す L_1-ノルムを最適制御の 4 倍程度で制御できた. 面内運動の動径方向の入力による制御ではシステムは不可制御であるが可制御部分空間を導出することにより, フォーメーション再構成が可能であり, 5 周期以内に収束させるときの最小な重みは q=0.049 であった. L_1-ノルムも最適制御の 3 倍程度で制御できた.

参考文献

[1] 岩井善太, 石飛光章, 川崎義則：制御工学, 朝日書店 (1997).

[2] A. Ichikawa: Recent Developments in Formation Flying, Lecture Notes ver.1, 2010.

[3] Y. Ichimura and A. Ichikawa:Optimal Impulsive Relative Orbit Transfer Along a Circular Orbit, Journal of Guidance, Control, and Dynamics, Vol. 31, No. 4, pp. 1014-1027, 2008.

[4] R. Jifuku, A. Ichikawa and M. Bando:Satellite Formation by Pulse Control Along a Circular Orbit, Journal of Guidance, Control, and Dynamics, Vol. 34, No. 5, pp. 1329-1341, 2011.

[5] 川田昌克, 西岡勝博：MATLAB/Simulink によるわかりやすい制御工学, 森北出版株式会社 (2001).

[6] 木田隆：スペースクラフトの制御, コロナ社 (1999).