カルマンフィルタを用いた二輪型倒立振子の制御

2006MI062 加藤雅也

指導教員：陳幹

1　はじめに

状態フィードバック制御は状態 x が直接観測できることが必要である．しかし, 実際のシステムでは状態 x をすべて観測できるとは限らない．もし, 状態 x が観測することができず, 観測システムの出力 y だけが与えられる場合, 状態推定器であるオブザーバを用いて状態 x を推定する必要がある．

本研究は, カルマンフィルタを同一次元のオブザーバの設計手法として利用し, 二輪型倒立振子の制御を行う．オブザーバとしてカルマンフィルタを使用し, 設計されたカルマンフィルタと最適レギュレータによって得られた状態フィードバック制御を併用したLQG制御を用いて姿勢制御を行う．シミュレーションを行い所望の性能を満たしているかを検証する．

2　制御対象とモデリング

制御対象として二輪型倒立振子ロボットであるLEGO Mindstormsを使用する．図1は二輪型倒立振子の倒立状態の観測モデルである．

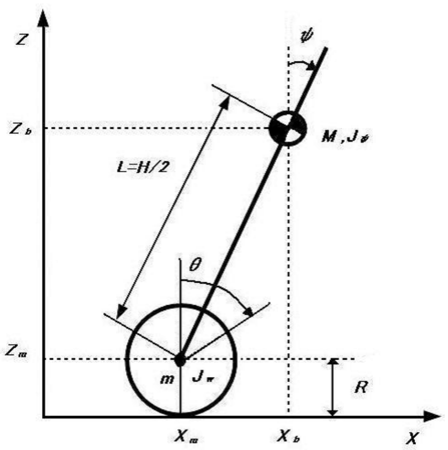

図1　二輪型倒立振子の倒立状態の観測モデル

ラグランジュの運動方程式を用いて状態方程式を導出する [1]．並進方向の運動エネルギー T_1, 回転方向の運動エネルギー T_2, 位置エネルギー U と置くと, ラグランジュの運動方程式 L は以下のようになる．

$$L = T_1 + T_2 - U \tag{1}$$

$$\begin{aligned} L &= \frac{1}{2}M(\dot{x}_b^2 + \dot{z}_b^2) + \frac{1}{2}m(\dot{x}_m^2 + \dot{z}_m^2) + \frac{1}{2}J_w\dot{\theta}^2 \\ &\quad + \frac{1}{2}J_\psi\dot{\psi}^2 + \frac{1}{2}J_m(\dot{\theta} - \dot{\psi})^2 - mgz_m - Mgz_b \end{aligned} \tag{2}$$

直立姿勢近傍で線形化を行い状態方程式を求める．

$\psi \to 0$ の極限を取り, $\sin\psi \to \psi$, $\cos\psi \to 1$, $\dot{\psi} \to 0$ とすると

$$F_\theta = [(m+M)R^2 + J_w + J_m]\ddot{\theta} + [MLR - J_m]\ddot{\psi} \tag{3}$$

$$\begin{aligned} F_\psi &= [MLR - J_m]\ddot{\theta} + [ML^2 + J_\psi + J_m]\ddot{\psi} \\ &\quad - MgL\psi \end{aligned} \tag{4}$$

$x = [\theta, \psi, \dot{\theta}, \dot{\psi}]^{\mathrm{T}}$, $u = V$ とすると, 状態空間表現は以下の形となる．

$$\dot{x} = Ax + Bu \tag{5}$$

3　最適レギュレータ

参考文献 [1] においては最適レギュレータを使用したサーボ系によって制御系が設計されている．観測出力と目標値との偏差を z とおき, サーボ系の設計には制御対象に積分器を付加した, 以下のような拡大系について考える．

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & 0 \\ C & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix} u \tag{6}$$

最適レギュレータは, 与えられた重み行列 $Q \geq 0, R > 0$ に対して, 評価関数

$$J = \int_0^\infty (x^{\mathrm{T}}Qx + u^{\mathrm{T}}Ru)dt \tag{7}$$

を最小化するようなフィードバックゲイン K を求めるものである．フィードバックゲイン K は

$$K = -R^{-1}B^{\mathrm{T}}P \tag{8}$$

の式で与えられる．ただし, P はリカッチ方程式

$$PA + A^{\mathrm{T}}P - PBR^{-1}B^{\mathrm{T}}P + Q = 0 \tag{9}$$

を満足する唯一の正定対称解である．

4　カルマンフィルタ

実際のシステムにおいては状態 x が全て観測できるとは限らない．状態 x が観測できず出力 y が観測できる場合, 状態推定器によって状態推定値 $\hat{x}$ を構成する必要がある．カルマンフィルタは入力, 出力にノイズが存在する問題に対してノイズを低減させる同一次元オブザーバを設計する手法の１つである．

状態を推定したい制御対象を

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu + Gv \\ y &= Cx + Hw \end{aligned} \tag{10}$$

とおく．この時, v はシステムノイズ, w は観測ノイズである．v, w はそれぞれ無相関な白色ノイズであり,

$$E[v(t)] = 0, E[w(t)] = 0$$
$$E[v(t)v(t)^{\mathrm{T}}] = Q_n, Q_n \geq 0$$
$$E[w(t)w(t)^{\mathrm{T}}] = R_n, R_n > 0$$

を満たす．この時, 定常偏差の共分散

$$J = \lim_{t\to\infty} E(\{x(t) - \hat{x}(t)\}\{x(t) - \hat{x}(t)\}^{\mathrm{T}})$$

を最小化する状態推定値 $\hat{x}$ をおく．
この時, 最適な解は

$$\begin{aligned}\dot{\hat{x}} &= A\hat{x} + Bu + L(y - C\hat{x}) \\ \begin{bmatrix} \hat{y} \\ \hat{x} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} C \\ I \end{bmatrix} \hat{x}\end{aligned} \tag{11}$$

の方程式となる．
カルマンフィルタゲイン L_k は

$$L_k = PC^{\mathrm{T}} R_n^{-1} \tag{12}$$

で与えられる．ただし行列 P はリカッチ方程式

$$PA^{\mathrm{T}} + AP - PC^{\mathrm{T}} R_n^{-1} CP + Q_n = 0 \tag{13}$$

を満たす唯一の正定解である．

5　シミュレーション

最適レギュレータの重み行列 Q, R をそれぞれ以下のようにした．

$$\begin{aligned} Q &= \mathrm{diag}[1, 3\times 10^5, 1, 1, 2\times 10^2] \\ R &= \mathrm{diag}[1\times 10^3, 1\times 10^3] \end{aligned}$$

この時, 状態フィードバックゲイン K_f 及び積分ゲイン K_i は以下のようになった．

$$\begin{aligned} K_f &= \begin{bmatrix} -0.6857 & -26.0554 & -1.0684 & -2.1452 \\ -0.6857 & -26.0554 & -1.0684 & -2.1452 \end{bmatrix} \\ K_i &= -0.3162 \end{aligned}$$

カルマンフィルタゲイン L_k を求める．システムノイズ v の重み行列 Q_n はモデル化誤差を考慮する [2]．変動するパタメータは車輪の半径 R[m] 及び, 車体の重心位置 L[m] の 2 種類とし, 変動する範囲はそれぞれ $0.0325 \leq R \leq 0.035$, $0.047 \leq L \leq 0.065$ とする．変動したパラメータの組み合わせは表 1 のようになる．

車輪の半径 R[m]	車体の重心位置 L[m]
0.0325	0.056
0.0325	0.047
0.0325	0.065
0.035	0.047
0.035	0.065

表 1　変動したパラメータの組み合わせ

また, 本体の初期傾斜角度を $\psi \neq 0$[deg] とした時の初期状態 $x(0) = [\theta, \psi, \dot{\theta}, \dot{\psi}]^{\mathrm{T}} = [0, \psi, 0, 0]^{\mathrm{T}}$, $u(0) = 0$ の場合を考えると, 式 (5) は以下のような形になる．

$$\dot{x}(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ A_{32}\psi \\ A_{42}\psi \end{bmatrix} \tag{14}$$

この時, 表 1 の組み合わせで変動したパラメータを用いた $\dot{x}(0)$ と, 変動させる前のパラメータを用いた $\dot{x}(0)$ との差の絶対値をそれぞれ求め, 各項で最大となるものをそれぞれ対角行列である Q_n の対角成分として決定した．傾斜角度 $\psi = 5.0$[deg] とした時, Q_n は以下の値を得た．

$$Q_n = \mathrm{diag}[2.6614, 4.4163, 2.6614, 4.4163] \tag{15}$$

観測ノイズ w の重み行列 R_n はジャイロセンサの観測ノイズを考慮する．静止状態でジャイロセンサが観測した角速度 $\dot{\psi}$[deg/s] を観測ノイズとし, 共分散 $E[w(t)w(t)^{\mathrm{T}}] = R_n$ を求める．その結果, R_n は以下の値を得た．

$$R_n = \mathrm{diag}[0.0618, 0.0618] \tag{16}$$

この時, カルマンフィルタゲイン L_k は以下の値を得た．

$$L_k = \begin{bmatrix} 1.3189 & 0.8039 \\ 0.1599 & 2.4038 \\ 0.9123 & 8.4177 \\ 1.3217 & 15.6242 \end{bmatrix} \tag{17}$$

導出されたゲインをもとに, カルマンフィルタを通して観測された状態推定値 $\hat{x}$ を用いて状態フィードバックを行う LQG 制御系を設計しシミュレーションを行った．図 2 は車体の初期傾斜角度を 5[deg] とした場合のシミュレーションの結果である．最終的に ±1[deg] 以内に収まっていることがわかる．

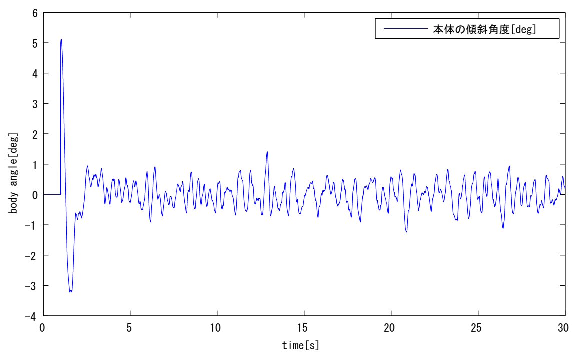

図 2　シミュレーション結果

6　おわりに

本稿では, 二輪型倒立振子ロボットにカルマンフィルタを適用して最適レギュレータで求めた状態フィードバックゲインとの LQG 制御系を設計した．そして得られたゲインをもとにシミュレーションを行った．

参考文献

[1] The MathWorks,Inc, NXTway-GS のモデルベース開発〜LEGO Mindstorms NXT を用いた二輪型倒立振子ロボットの制御 (2009)

[2] 吉田一秀：オブザーバ, カルマンフィルタを併用した故障検出性能の向上, 南山大学大学院数理情報研究科数理情報専攻 2009 年度修士論文 (2009)