群と剰余類

2006MI042 石井洋太
指導教員：佐々木克巳

1 はじめに

本研究の目的は, 芳沢 [1] にしたがって, 群とその剰余類に関する性質を理解することである. 具体的には,[1] で述べられている群や剰余類に関する証明を,[1] で省略された部分を補いながら丁寧に記述する. 卒業論文では, 関連する概念を定義し, それらに関するいくつかの性質を,[1] で与えられた証明を補う形で証明した. 本稿では, 置換と部分群に関する性質を,[1] の証明を補う形で示す.

2 置換

ここでは置換の性質を述べる.

補題 2.1 図 1(左上) のように n 本の縦線だけが引かれているあみだくじの原形があるとき,$\{1, 2, \cdots, n\}$ 上の任意の置換 σ に対し, その原形に何本かの横線を引いて σ と同じ作用をするあみだくじを作ることができる.

証明 n に関する帰納法で示す.
(1)$n = 1$ のとき:明らかに成立する.
(2)$n > 1$ のとき:$n-1$ まで成立すると仮定する. すなわち, 図 1(右上) のように $n-1$ 本の縦線だけが引かれているあみだくじの原形があるとき,$\{1, 2, \cdots, n-1\}$ 上の任意の置換 σ' に対し, その原形に何本かの横線を引いて σ' と同じ作用をするあみだくじを作ると仮定する.
(2.1)$\sigma(n) = n$ のとき:

$$1, 2, \cdots, n-1$$

をそれぞれ

$$\sigma(1), \sigma(2), \cdots, \sigma(n-1)$$

にうつす置換 σ' に対して, 帰納法の仮定を用いると, 図 1(右上) に何本かの横線を引いて σ' と同じ作用をするあみだくじを作ることができる. このあみだくじの右端に n から n への縦線を加えてできるあみだくじは σ と同じ作用をするあみだくじである.
(2.2)$\sigma(n) \neq n$ で $\sigma(i) = n$ のとき:図 1(左上) に, 図 1(左下) のように横線を引いて $\sigma(i) = n$ となるあみだくじを作ることができる. ここで,

$$1, 2, \cdots, i-1, i+1, \cdots, n-1, n$$

をそれぞれ

$$\sigma(1), \sigma(2), \cdots, \sigma(i-1), \sigma(i+1), \cdots, \sigma(n-1), \sigma(n)$$

にうつす写像 σ' と同じ作用をするあみだくじは, 帰納法の仮定を用いると, 図 1(右下) に何本かの横線を引いて作ることができる. よって, 図 1(左下) に, 図 1(右下) に引いたものと同じ横線を引いてできるあみだくじは i を n にうつし,

$$1, 2, \cdots, i-1, i+1, \cdots, n-1, n$$

をそれぞれ

$$\sigma(1), \sigma(2), \cdots, \sigma(i-1), \sigma(i), \cdots, \sigma(n-1), \sigma(n)$$

にうつす写像なので σ と同じ作用をするあみだくじである.

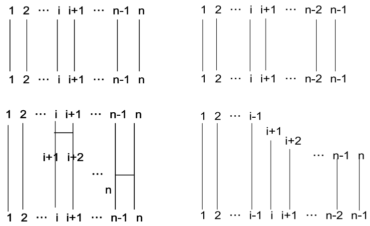

図 1 あみだくじの原形など

上の証明は,[1] で省略されている部分を補い, 図を加えることでより理解しやすくしたものである.

定義 2.2 有限集合 Ω の相異なる t 個の元 $a_1, a_2, \cdots, a_t$ に対し,a_i を $a_{i+1}(i = 1, 2, \cdots, t-1)$ に,a_t を a_1 に写し, それら以外の Ω の元を固定する Ω 上の置換を $(a_1 \quad a_2 \quad \cdots \quad a_{t-1} \quad a_t)$ で表す. これを巡回置換という.

芳沢 [1] では, 上記のように巡回置換のことが書かれている. この定義における「a を b に写す」とは,a のあった場所に b を移動するの意味であり, その置換が,a を b に対応させるという意味ではない. 具体的には, 巡回置換 $(a_1 \quad a_2 \quad \cdots \quad a_{t-1} \quad a_t)$ は左下のように対応させる置換である. 定義の「a を b に写す」を a を b に対応させると解釈した場合は右下の対応になる.

$$\begin{array}{ll} a_1 \to a_t & a_1 \to a_2 \\ a_2 \to a_1 & a_2 \to a_3 \\ \vdots & \vdots \\ a_t \to a_{t-1} & a_t \to a_1 \end{array}$$

次の例は,[1] のある性質の証明に現れる等式である.

例 2.3 $(1 \quad b)(1 \quad a) = (1 \quad b \quad a)$

本研究では, 定義 2.2 の解釈と関連づけて, 以下の説明を加えた.

説明 この左辺 $(1 \quad b)(1 \quad a)$ は $1, a, b$ を,

$$\begin{array}{ccccc} 1 & \to & a & \to & a \\ a & \to & 1 & \to & b \\ b & \to & b & \to & 1 \\ & (1 \quad b) & & (1 \quad a) & \end{array}$$

のようにうつす置換, すなわち,1 を b のあった場所へ,b を a のあった場所へ,a を 1 のあった場所へうつす置換であり, 等号が成立する. 一方,$(1\quad b\quad a)$ を,

$$\begin{array}{ccc} 1 & \to & b \\ b & \to & a \\ a & \to & 1 \end{array}$$

のようにうつすと解釈すると等号は成立しない.

3 部分群

ここでは部分群の定義とそれに関する性質を述べる. 以下では,G の演算記号は適義省略する.

定義 3.1 群 G の部分集合 H が G と同じ演算に関して群になるとき,H は G の部分群であるという.

補題 3.2 G は演算 $\circ$ に関して群とする.G の部分集合 H が次の (1),(2),(3) を満たすとき,H は G の部分群である.
(1)$H \neq \phi$
(2)$a, b \in H$ ならば $a \circ b \in H$
(3)$a \in H$ ならば $a^{-1} \in H$

この補題は,[1] では明記されていなかったが, 次の補題 3.3 で必要なので, この形でまとめて証明を加えた.

証明 次の 4 つを示せばよい.G の単位元を e とする.
(4)H は群 G と同じ演算 $\circ$ に関して閉じている.
(5)H で結合法則が成り立つ.
(6)e は H の単位元である.
(7)H の任意の元 a の逆元がある.
(4) は,(2) より導かれる.(5) は,G で結合法則が成り立つことから,H でも成り立つ.(6) を示す.(1) により少なくとも 1 つ H の元 a がある.(3) によって,$a^{-1} \in H$ である. また,(2) より $e = a \circ a^{-1} \in H$ となる.e が G の単位元であることを用いると、H の単位元とわかる.(7) は,(3) より導かれる.

補題 3.3 群 G とその部分群 H に対して,G の元 a, b の間の関係 $\sim$ を $a \sim b \Leftrightarrow ab^{-1} \in H$ によって定める. このとき,$\sim$ は G における同値関係である. ただし,$a \in G$ の G における逆元を a^{-1} とする.

証明 G の単位元を e とする. 関係 $\sim$ が反射律, 対称律, 推移律を満たすことを示せばよい.
1. 反射律 (任意の $a \in G$ に対して $a \sim a$) を示す.

(1)e は G の単位元	∵前提
(2)H は G の部分群	∵前提
(3)$e \in H$	∵ (1),(2), 補題 3.2(6)
(4)a^{-1} は a の逆元	∵前提
(5)$aa^{-1} = e$	∵ (1),(4)
(6)$aa^{-1} \in H$	∵ (3),(5)
(7)$a \sim a$	∵ (6) と定義

2. 対称律 (任意の $a, b \in G$ に対して $a \sim b \to b \sim a$) を示す.

(1)$a \sim b$	∵仮定
(2)$ab^{-1} \in H$	∵ (1) と定義
(3)H は G の部分群	∵前提
(4)$(ab^{-1})^{-1} \in H$	∵ (2),(3), 補題 3.2(3)
(5)$(ab^{-1})^{-1} = ba^{-1}$	
(6)$ba^{-1} \in H$	∵ (4),(5)
(7)$b \sim a$	∵ (6) と定義

3. 推移律 (任意の $a, b, c \in G$ に対して $a \sim b, b \sim c \to a \sim c$) を示す.

(1)$a \sim b, b \sim c$	∵仮定
(2)$ab^{-1} \in H, bc^{-1} \in H$	∵ (1) と定義
(3)H は G の部分群	∵前提
(4)$(ab^{-1})(bc^{-1}) = ac^{-1}$	∵結合法則など
(5)$(ab^{-1})(bc^{-1}) \in H$	∵ (2),(3)
(6)$ac^{-1} \in H$	∵ (4),(5)
(7)$a \sim c$	∵ (6) と定義

[1] では, 上の証明を "1(4)","2(5)","3(2) から 3(4),(5),(6) が導かれること" で説明しているが, 本研究では上のように補った.

定義 3.4 群 G の部分群 H と群 G の元 a に対して,

$$aH = \{ah | h \in H\}$$

と置く. この aH を左剰余類という.

補題 3.5 $aH \neq bH$ ならば $aH \cap bH = \phi$

この補題は, 補題 3.3 と同値関係の性質から導かれるが, 本研究ではその直接の証明を以下のように与えた.

証明 $aH \cap bH \neq \phi$ から $aH = bH$ が次のように得られる.

(1)$aH \cap bH \neq \phi$	∵仮定
(2)$c \in aH \cap bH$ とできる.	∵ (1)
(3)$c \in aH, c \in bH$	∵ (2)
(4)$c \in \{ah \vert h \in H\}, c \in \{bh \vert h \in H\}$	∵ (3)
(5)$c = ah_1, c = bh_2, h_1, h_2 \in H$ とできる.	∵ (4)
(6)$ah_1 = bh_2$	∵ (5)
(7)$a = bh_2{h_1}^{-1}, b = ah_1{h_2}^{-1}$	∵ (6)

ここで,$aH \subseteq bH$ を示すために任意 $x \in aH$ にが与えられたとする.

(8)$x \in aH$	∵仮定
(9)$x \in \{ah \vert h \in H\}$	∵ (8)
(10)$x = ah, h \in H$ とできる.	∵ (9)
(11)$x = bh_2{h_1}^{-1}h$	∵ (7),(10)
(12)$h_2{h_1}^{-1}h \in H$	∵ (5),(10)
(13)$x \in bH$	∵ (11),(12)

以上より,$aH \subseteq bH$ が示された. 同様に $bH \subseteq aH$ を示すことができる (卒業論文ではその詳細を示したが, 本稿では省略する) ので,$aH = bH$ を得る.

参考文献

[1] 芳沢光雄:『置換群から学ぶ組合せ構造』. 日本評論社, 東京,2004.