和文数訳による文構造の理解

2007MI227 鈴木孝明
指導教員：佐々木克巳

1　はじめに

本研究の目的は、新井 [1] で述べられている和文数訳を体験し、それにより文の構造を理解することである。具体的には和文数訳に対し、その方法を理解すること、多くの例を体験すること、系統的に和文数訳を行うこと、その利点を示すことを行う。卒業論文では、命題から対象と関係、論理結合子を抽出し、丁寧に構造を見抜きながら、和文数訳を行い、数訳の方法をいくつかの種類に分類することで数訳の良さを理解した。本稿では、2 節で和文数訳の概観を述べ、3 節で和文数訳の具体例をあげる。その具体例は、卒業論文で示した各分類から抽出した。

2　導入

2.1　和文数訳

日本語で書かれた数学の命題を、数学の記号だけからなる数文に変換することを和文数訳と言う。このことは、命題から対象と関係、そして論理結合子を抽出し、文の構造や論理結合子の意味を意識しながら行うと、うまくいく。

和文数訳の主な利点は 2 つある。その第一は、命題を和文数訳することで、問題が整理され見やすくなることである。その第二は、命題の構造を考えながら数訳を行うことで、その構造を見抜く力がつくことである。これらの利点は、例えば証明問題において、アイデアが浮かばない場合に、有効である。命題中の論理結合子に従って正確に和文数訳できれば、証明の方法は自ずと立ち現われてくる。

2.2　数文に用いる記号

本研究において数文に用いる論理記号は 7 種類であり、それらを表 1 に示す。

表 1　論理記号の一覧

論理記号	論理結合子
$\neg$	でない
$\wedge$	かつ/, (カンマ)
$\vee$	または/あるいは/, (カンマ)
$\rightarrow$	ならば/のとき
$\leftrightarrow$	のとき/同値/つまり
$\exists x$	ある/存在する
$\forall x$	すべての/どんな/任意の

関係を表す記号は以下の 4 つである。

$=$　：　等しい
$<$　：　大小
$\in$　：　属する
$|$　：　「x が y を割り切る」を $x|y$ と表現する。

集合を表す記号は、以下の 2 つである。

$\mathbb{N}$ ：自然数の全体からなる集合（本稿では $0 \notin \mathbb{N}$ ）
$\mathbb{Q}$ ：有理数の全体からなる集合

3　和文数訳の具体例

ここでは、和文数訳の具体例をあげる。ただし、$l, m, n, k, \cdots$ などを整数を表わす記号、$a, b, c, d, \cdots$ などを自然数を表わす記号、$x, y, z, \cdots$ などを実数を表わす記号として用いる。以下の、例 [1] は、和文から忠実に数訳を行う。例 [2],[3],[4],[5] は、定義を元に数訳を行う。例 [6] は、変数を補う必要のある数訳を行う。例 [7] は、$\varepsilon - \delta$ 論法に関する和文を扱う。例 [8] は、言葉を補う必要のある数訳を行う。

[例 1] **([1])x=4,y=6 のとき、方程式 3x+2y=24 と x+y=10 は同時に成り立つ。**

この文は、「A のとき B である」の形をしているので、$A \rightarrow B$ の形に数訳できる。A は「$x = 4, y = 6$」であり、「,」は「かつ」に変換できるので $x = 4 \wedge y = 6$ と数訳できる。B は「方程式 $3x + 2y = 24$ と $x + y = 10$ は同時に成り立つ」であり、$3x + 2y = 24 \wedge x + y = 10$ と数訳できる。よって求める数訳は

数訳）$(x = 4 \wedge y = 6) \rightarrow (3x+2y = 24 \wedge x+y = 10)$

[例 2] **n は偶数である。**

記号「$|$」を用いて、数訳を行う。偶数の定義より、求める数訳は

数訳 1) $2|n$

この文の構造をさらに細かく見て、数訳することもできる。偶数の定義より。与えられた整数 n が偶数であるとは、ある整数 k を用いて $n = 2k$ と表されることである。

数訳 2) $\exists k(n = 2k)$

[例 3] **x は有理数である。**

記号 $\mathbb{Q}$ を用いて、数訳すると

数訳 1) $x \in \mathbb{Q}$

この文の構造をさらに細かく見て、数訳することもできる。有理数の定義より「x は有理数である」は「ある整数 k、自然数 a を用いて x は $\frac{k}{a}$ と表せ

る」ということである。この文は、「ある k とある a を用いて A」の形をしているので、$\exists k\exists aA$ と数訳できる。A は「x は $\frac{k}{a}$ と表せる」であり、$x=\frac{k}{a}$ と数訳できる。よって求める数訳は
数訳 2) $\exists k\exists a(x=\dfrac{k}{a})$

[例 4] ([1])a が素数である。

素数の定義より、「a が素数である」を書き換えると「a は 1 より大きく、さらに、どんな b に対しても b が a の約数ならば、b は 1 であるか a 自身であるかのどちらかである」と書き換えられる。これは、「a は 1 より大きく、さらに A」の形をしているので $1<a\wedge A$ の形に数訳できる。A は「どんな b に対しても、B ならば C」であり、$\forall b(B\to C)$ の形に数訳できる。B は「b が a の約数」であり、$b\mid a$ の形に数訳できる。C は「b は 1 であるか a 自身であるかのどちらかである」であり、$b=1\vee b=a$ と数訳できる。よって求める数訳は
数訳)$1<a\wedge\forall b(b|a\to(b=1\vee b=a))$

[例 5] ([1]) 関数 $f(x)$ は下に有解である。

「ある N が存在し、任意の x について $N\le f(x)$ が成り立つ」とき、「$f(x)$ は下に有解である」という。この定義より、与えられた文は「ある y が存在し、任意の x について $y\le f(x)$ が成り立つ」と書き換えられる。これは、「ある y が存在し、A」の形をしているので、 $\exists yA$ という形に数訳できる。A は「任意の x について $y\le f(x)$ が成り立つ」であり、$\forall x(y\le f(x))$ と数訳できる。よって求める数訳は
数訳) $\exists y(\forall x(y\le f(x)))$

[例 6] ([1]) どんな 2 つの偶数の積も 4 の倍数になる。

この文は、変数 k,l を用いて「すべての k,l において、k と l が偶数ならば、積 kl は 4 の倍数である」と書き換えられる。これは、「すべての k,l において、A ならば B である」の形をしているので、$\forall k\forall l(A\to B)$ の形に数訳できる。A は「k と l が偶数」であり、変数 k',l' を用いて、$\exists k'(k=2k')\wedge\exists l(l=2l')$ と数訳できる。B は、「積 kl は 4 の倍数」であり、変数 n を導入して $\exists n(kl=4n)$ と数訳できる。よって求める数訳は
数訳) $\forall k\forall l(\exists k'(k=2k')\wedge\exists l'(l=2l')\to\exists n(kl=4n))$

[例 7] ([1],[3])$f(x)$ は $x=a$ において連続である。

「$f(x)$ が $x=a$ において連続である」とは「$f(x)$ の $x=a$ における極限が $f(a)$ である」ことを意味する。「$f(x)$ の $x=a$ における極限が $f(a)$ である」は $\varepsilon-\delta$ 論法を用いれば、次のように定式化できる。「正の数 ε が任意に与えられたとき、正の数 δ が存在し、どんな x に対しても、$|x-a|<\delta$ ならば $|f(x)-f(a)|<\varepsilon$ が成り立つ」と書き換えられる。これは、「正の数 ε が任意に与えられたとき、A」の形をしているので、$\forall\varepsilon>0A$ と数訳できる。A は「正の数 δ が存在し、B」であり、$\exists\delta>0B$ と数訳できる。B は「どんな x に対しても、C ならば D」であり、$\forall x(C\to D)$ の形に数訳できる。C は $|x-a|<\delta$ であり、D は $|f(x)-f(a)|<\varepsilon$ である。これを最初の数訳からつなぎ合わせると、求める数訳は
数訳) $\forall\varepsilon>0(\exists\delta>0(\forall x(|x-a|<\delta\to|f(x)-f(a)|<\varepsilon)))$

[例 8] ([2])$\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ が有理数ならば、$\sqrt{2}$ 乗して有理数となる無理数が存在する。

この文は、「A ならば B」の形をしているので、$A\to B$ の形に数訳できる。A は「$\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ が有理数」であり、$\sqrt{2}^{\sqrt{2}}\in\mathbb{Q}$ と数訳できる。B は「「x は $\sqrt{2}$ 乗して有理数となる無理数である」を満たす x が存在する」 と書き換えられるので、 $\exists xC$ の形に数訳できる。C は「x は $\sqrt{2}$ 乗して有理数となる無理数である」であり、「x は $\sqrt{2}$ 乗して有理数となり、かつ、x は無理数である」と書き換えられるので、$D\wedge E$ の形をしている。D は $x^{\sqrt{2}}\in\mathbb{Q}$ と数訳できる。E は「x が有理数である」ことの否定と同値であるので、$\neg x\in\mathbb{Q}$ と数訳できる。よって B は $\exists x(x^{\sqrt{2}}\in\mathbb{Q}\wedge\neg x\in\mathbb{Q})$ と数訳できる。したがって求める数訳は
数訳) $(\sqrt{2}^{\sqrt{2}}\in\mathbb{Q})\to\exists x(x^{\sqrt{2}}\in\mathbb{Q}\wedge\neg x\in\mathbb{Q})$

4 おわりに

本研究の結果、文の構造や論理結合子の意味を意識しながら、数訳できる力を身につけることができた。ただ単に、和文数訳の技術を身につけただけではなく、自分の頭の中がそれ以前に比べ、整理されていることがわかる。この研究を行っていく中で、定義をしっかりと理解することの大切さを認識することができた。正しく定義を理解していることで、数訳ができ、構造が見え、文の内容も見えてくることがわかる。今後、この考え方を教育に役に立てていきたい。

5 参考文献

[1] 新井紀子:『数学は言葉』, 東京図書東京, 2009
[2] 佐々木克巳:『南山大学情報理工学部講義科目「数理論理学」講義資料』, 2009
[3] 細井学:『はじめて学ぶ イプシロン・デルタ　数学の論理と日本語』, 日本評論社, 東京, 2010