2 次元適応型積分則　ー誤差評価法ー

2007MI213 嶋出静香
指導教員：杉浦洋

1　はじめに

2 次元の一般的な領域上の積分は，適当な領域分割と変数変換により三角領域上の積分に帰着できる．この意味で三角領域上の数値積分則は基本的で重要である．

本研究では二次元三角領域上の定積分を近似する適応型数値積分則の構成を行う．

適応型積分則とは，要求精度にしたがって三角領域を小三角領域に分割し，各小三角領域に同じ基本公式を用いる計算法である．分割が細かくなればなるほど精度はよくなる．その際，積分誤差の小さい部分は粗く分割し，積分誤差の大きい部分は細かく分割することで，一様均等な分割法と同じ精度が，より少ない分割数で達成できる．

分割法については，牧 [2] は，小三角領域を最長辺の中点と頂点を結ぶ線分で分割する方法を用いた．また古田 [3] によれば，被積分関数の変化が激しい方向に沿った辺を分割する方法がさらに効率的である．そして，西田 [4] では分割する前に各方向で分割後の誤差を推定し，その絶対値が小さい方向に分割する方法を用いた．この方法は 3 つの中で最も優れている．しかし，小三角領域における積分誤差の評価が過小になり，要求精度に達する前に積分を終了してしまう失敗が少数ではあるが見られた．

今回は西田の分割方法を利用し，さらに西田より騙されにくい誤差評価法を構成することを目指した．

2　数値積分則の設計

xy-平面上の 3 点 a, b, c を頂点とする，三角領域を $D = D(a,b,c)$ と書く．

基本三角領域 $\Delta = D((0,0),(1,0),(0,1))$ の n 個の標本点 $\pi_1 = (\xi_1,\eta_1)$,$\pi_2 = (\xi_2,\eta_2)$，$\cdots$,$\pi_n = (\xi_n,\eta_n) \in \Delta$ と重み ρ_1,ρ_2，$\cdots$,ρ_n による積分公式を

$$I_n f = \sum_{l=1}^{n} \rho_l f(\pi_l) \cong \int_{\Delta} f(\mathbf{x}) dxdy$$

と書く．

Δ から一般の三角領域 D へのアフィン変換 $p = \varphi(q)$ による変数変換で

$$Q(D)f = \iint_D f(p)dxdy = 2S \iint_{\triangle} f(\varphi(q))dtdu.$$

この右辺に積分則 I_n を用いて D 上の積分公式

$$I_n(D)f = 2S \sum_{i=1}^{n} \rho_i f(\varphi(\xi_i,\eta_i)) \cong Q(D)f \qquad (1)$$

を得る．ここで，S は D の面積である．

[定義 2.1]　任意の s 次式 f で $I_n(D)f = Q(D)f$，かつ $I_n(D)f \neq Q(D)f$ となる $s+1$ 次式 f が存在するとき，積分公式 $I_n(D)$ は次数 s であると言う．//

[定理 1]　積分則 (1) の積分公式 $I_n(D)$ が s 次だとする．被積分関数 f は $s+1$ 回連続微分可能とし，

$$M_D = \max_{p\in D} \sum_{k=0}^{s+1} \left| \frac{f^{(k,\, s+1-k)}(p)}{k!(s+1-k)!} \right|$$

とする．三角領域 D を含む最小の円の半径を r とする．このとき，

$$|Q(D)f - I_n(D)f| \leq (2 \parallel I_n \parallel_{\triangle} +1) M_D S r^{s+1}.$$

ここで，$\parallel \cdot \parallel_{\triangle}$ は領域 $\triangle$ 上の一様ノルムである．//

積分誤差は D の面積 S と半径 r が小さいほど小さくなる．

3　適応型積分則の基本アルゴリズム

$\epsilon > 0$ を許容誤差とする適応型積分則 $Q(D,\epsilon)$ は次のような再帰関数で表現できる．

$$\hat{Q}(D,\epsilon)f = \begin{cases} I_n(D)f & (E_n(D)f \leq \epsilon) \\ \hat{Q}(D_1,\frac{\epsilon}{2}) + \hat{Q}(D_2,\frac{\epsilon}{2}) & (E_n(D)f > \epsilon) \end{cases}$$

$E_n(D)$ は $I_n(D)$ の誤差評価式である．ここでは，I_m を I_n の低次埋め込み公式とし，$E_n(D)f = |I_n(D)f - I_m(D)f|$ とした．

このアルゴリズムでは，与えられた許容誤差 $\epsilon > 0$ に対し真の積分値 $Q(D)f$ の近似積分 $I(D)f$ を $|I(D)f - Q(D)f| \leq \epsilon$ を満たすように計算する．もし，$|I(D)f - Q(D)f| > \epsilon$ なら，領域 D をその頂点と重心 g を通る直線で小三角領域 D_0, D_1 に 2 分し（図 1），それぞれに同じ積分則 (1) を用いる．

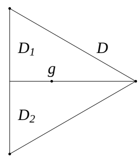

図 1　三角形の分割

この再帰的な操作を繰り返し，すべての小領域で割り当てられた許容誤差を満たした時点で近似積分が完了する．

分割は，辺の中点と重心を結ぶ直線による面積等分割を用いる．選ぶ辺により，3 つの分割方向が考えられ，効率的な数値積分の構成には分割方向の決定が重要である．

4　適応型積分則における分割方法と誤差評価

4.1　牧の分割方法とその欠点

牧 [2] では，誤差の定理 1 から，領域 D を含む最小の円の半径を小さくするために三角形の最長辺を 2 等分した．この方法では，被積分関数の情報が反映せず，理想的な分割に比べ，分割数が増えてしまうと思われる．

4.2 古田の分割方法とその欠点

古田 [3] の積分法は，A．Genz，R．Cools[1] を参考にして被積分の変化が激しい方向に沿った辺を分割する．被積分関数が激しく変化する方向を検出するために，3 階差分を採用している．

4.3 西田の分割方法とその欠点

西田 [4] は，分割後の誤差を分割前に推定する方法を考案した．これにより，最も誤差の小さくなる分割方向を予想し，その方向に分割する積分法を開発した．この方法は，牧 [2]，古田 [3] と比べ，分割方向の決定が的確であった．我々は，分割方向の決定に関しては西田の方法を採用する．しかし，どの方法においても誤差評価関数 $E(D)f$ が誤差を過小評価したため，要求精度に達する前に積分を終了してしまうという失敗が少数ながら観察された．

4.4 我々の方法

＜誤差評価式＞ 基本領域 △ における 3 次積分則の誤差評価法を考える．西田は 10 点 3 次則 $I_{10}f$ を用い，7 点 2 次埋め込み則 $I_7 f$ により誤差評価式 $E_{10}f = \left|I_7 f - I_{10}f\right|$ を導いた．許容誤差を $\epsilon > 0$ とするとき，誤差 $|I_{10}f - If| > \epsilon$ にもかかわらず，$|E_{10}f| \le \epsilon$ となると，積分は失敗する．西田の実験でも少数ながら，このような失敗例が観察された．

これを改善するために，複数の誤差評価式を用いて，誤差を評価する方法が考えられる．

誤差評価に用いる埋め込み 2 次公式を $\tilde{I}_{10}f = \sum_{i=1}^{10} \tilde{\rho}_i f(\pi_i)$ とする．標本点 $\pi_i = (\xi_i, \eta_i)$ $(1 \le i \le 10)$ は固定されているので，重み $\tilde{\rho}_i$ は 2 次公式であるための 6 つの条件

$$\sum_{i=1}^{10} \tilde{\rho}_i \xi_i^k \eta_i^l = \frac{k!l!}{(k+l+2)!} \quad (k \ge 0,\, l \ge 0,\, k+l \le 2) \quad (2)$$

を満たさなければならない．それに加えて，$0 \le \kappa \le 3$ に対し，3 次単項式 $x^\kappa y^{3-\kappa}$ のみが正確に積分できない条件

$$\sum_{i=1}^{10} \tilde{\rho}_i \xi_i^\kappa \eta_i^{3-\kappa} = \frac{\kappa!(3-\kappa)!}{5!}(1 - \delta_{k,\kappa}) \quad (0 \le k \le 3) \quad (3)$$

を加えると，$\tilde{\rho}_i$ に関する方程式 (2)，(3) は一意解を持ち，1 つの埋め込み公式 $\tilde{I}_{10}^{<\kappa>} f$ が確定する．ここで

$$\delta_{k,\kappa} = \begin{cases} 1 & , k = \kappa, \\ 0 & , k \ne \kappa \end{cases}$$

はクロネッカーのデルタである．

これを用いて，4 つの誤差評価式

$$E_{10}^{<\kappa>} f = \left|\tilde{I}_{10}^{<\kappa>} f - I_{10} f\right| \quad (0 \le \kappa \le 3)$$

が得られる．そして，許容誤差 $\epsilon > 0$ に対し，$E_{10}f \equiv \max_{0 \le \kappa \le 3} \{E_{10}^{<\kappa>} f\} \le \epsilon$ のとき，$|I_{10}f - If| \le \epsilon$ とみなすこととする．

この方法は，1 つの誤差評価式のみを用いる西田らの方法と比べ，格段に頑健であると期待できる．

5 数値実験結果

数値実験を行うと，非常に頂角の小さい細長い三角領域を作り，再帰計算が停止しないという事故が少数ながら見られた．細長い三角形はそれを含む最小円の半径が大きく，多項式補間の精度が低いため，三角形の頂角 θ の余弦 $\cos\theta$ に上限 $c_{\max}$ を設け，$\cos\theta \ge c_{\max}$ となる頂角は分割しないことにした．

二等辺三角領域 $D = D((0,0), (1/2, 1), (1, 0))$ で 8 次式の結果を記載した．許容誤差は $\epsilon = 10^{-4}$ である．

この問題では，我々の方法は最高の効率を示した．

	x^8	x^7y	x^6y^2	x^5y^3	x^4y^4
S	**59**	**121**	**244**	**218**	**144**
N	90	278	542	478	383
M	430	933	962	742	644
F	92	663	802	670	465

6 おわりに

三角領域における数値積分において，精度の低い三角領域を 2 つの小三角領域に分割することを繰り返して，求める精度の近似積分を行う適応型積分則について研究した．牧論文 [2]，古田論文 [3]，西田論文 [4] を参考に今回は誤差評価を中心に研究を行った．牧では，分割方向を，三角領域の形状に基づき小三角領域を最長辺の中心と頂点を結ぶ線分で分割する方法用い，古田では，被積分関数の変化の激しい方向に沿った辺を分割する A．Genz，R．Cools[1] の方法も有力と考え，被積分関数の偏導関数に基づく決定法を行い，西田では，3 次補間に基づく分割後の誤差予測による分割の研究を行った．我々は，最も優秀であった西田の分割を採用し，新たに騙されにくい誤差評価法を提案した．性能の良い誤差評価式を構成し，プログラムを作成し，数値実験を行った．我々の方法は，分割戦略，誤差評価法共に性能がよく，優秀であった．しかし西田に比べ計算時間がかかるため，高速化かつ高精度化が今後の課題である．

7 参考文献

[1] A．Gentz，R．Cools，An Adaptive Numerical Cubature Algorithm for Simplices，ACM Transactions on Mathematical Software，Vol. 29，September 2003，P．297-308

[2] 牧哲弘，領域の三角分割による 2 次元適応型積分則，南山大学数理情報学部数理学科 2006 年度卒業論文，2007

[3] 古田達也，２次元適応型積分則 (三角形分割の戦略)，南山大学数理情報学部数理学科 2007 年度卒業論文，2008

[4] 西田絵里奈，２次元適応型積分則 (三角形分割の戦略．２)，南山大学数理情報学部情報システム数理学科 2009 年度卒業論文，2010