ゲインスケジュールド制御の保守性改善

2007MI211 柴田 皓右
指導教員：陳 幹

1 はじめに

非線形系である 2 自由度ヘリコプタを制御するにあたり、本研究では非線形要素を変動パラメータと考えゲインスケジュールド制御を行う。パラメータの各端点で H_∞ 仕様を満たすコントローラを作り、ポリトープ形式で補間をしたものを扱うが、本研究では保守性の改善を試みたコントローラを作成し、シミュレーションを通して理論の有用性を確認する

2 制御対象

本研究では 2 自由度ヘリコプタ (図 1) を制御対象として扱い、上下運動の角度 θ、左右運動の角度 ψ をそれぞれ制御する。モデル化を行うにあたり、ラグランジュの運動方程式から導き出したものを、一部分のみ線形化する。残りは陽に扱い、結果として状態空間表現における A 行列は $\sin\theta\cos\theta\dot{\psi}$ を含んだ行列となり、本研究ではこれらを変動パラメータとして扱う。パラメータは以下に示す領域内で変動すると仮定する。

$$-3 \le \sin\theta\cos\theta\dot{\psi} \le 3 \tag{1}$$

この 2 端点により A 行列をポリトープ形式で補間することで、$A(\alpha) = \alpha_1 A_1 + \alpha_2 A_2$ と表すことができる。

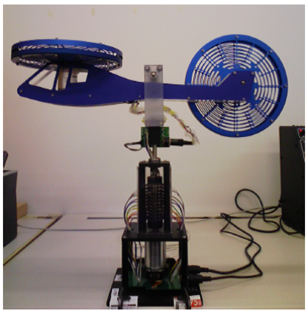

図 1 2 自由度ヘリコプタ

3 制御器設計

本研究では状態フィードバック制御器を設計することを考える。

$$F : u = -Fx \tag{2}$$

H_∞ 仕様を満たす制御器を設計するために、まず一般化プラントを構築する。偏差の積分に対する重みを W_e 制御入力を制限するための重みを W_u として図 2 に各重みを接続した一般化プラントの図を示す。状態空間表現における一般化プラントは次式で定義される。

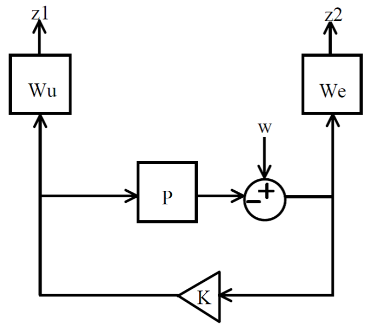

図 2 一般化プラント

$$\left[\begin{array}{cc|cc} A_i & 0 & 0 & B \\ -B_eC_p & A_e & B_e & -B_eD_p \\ \hline 0 & 0 & 0 & W_u \\ -D_e & C_e & D_e & -D_eD \\ I & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right] (i = 1, 2) \tag{3}$$

ただし $W_e = \{0, I, I, 0\} = \{A_e, B_e, C_e, D_e\}, W_u = 50$ である。ゲインスケジュールド制御器を設計するにあたり、フィードバックゲイン F はパラメータの各端点で求めたものをポリトープ形式で補間する。

$$F(\alpha) = \alpha_1 F_1 + \alpha_2 F_2 \tag{4}$$

従って、次式の LMI を解く。

$$\begin{bmatrix} \mathrm{He}[A_iP - B_2M_i] & * & * \\ C_1P - D_{12}M_i & -\gamma I & * \\ B_1^T & D_{11}^T & -\gamma I \end{bmatrix} < 0 \tag{5}$$

$$M_1 = F_1P, M_2 = F_2P \tag{6}$$

$P > 0, M_1, M_2$ を求めることができれば、フィードバックゲインは次式のようになる。

$$F_1 = M_1P^{-1}, F_2 = M_2P^{-1} \tag{7}$$

実際に求めたコントローラは以下になった。

$$F_1 = \begin{bmatrix} 11.20 & 6.00 & 1.72 & 1.52 & -4.11 & -2.26 \\ -7.77 & 23.14 & -0.96 & 6.21 & 2.50 & -7.99 \end{bmatrix}$$

$$F_2 = \begin{bmatrix} 15.34 & -7.89 & 2.17 & -1.98 & -5.43 & 2.55 \\ -3.98 & 22.21 & -0.21 & 5.99 & 1.14 & -7.72 \end{bmatrix}$$

今まで求めてきたコントローラは $i = 1, 2$ について共通の LMI 解 P を用いたゲインの決定方法であった。この方法は変数の数が多くなれば多くなるほど保守的になる

可能性がある。そこで、Lyapunov 関数 $V(x)$ をパラメータ依存型に拡張し、次式で示す。

$$V(x) = x^T P(\theta, \dot{\psi}) x > 0, \tag{8}$$

これを時間微分すると、

$$\dot{V}(x) = \dot{x}^T P x + x^T P \dot{x} + x^T \dot{P} x \tag{9}$$

となる。よって求めるべき LMI の 1 行 1 列目にリアプノフ関数の微分項が現れることになる。本研究ではこのリアプノフ関数を、ポリトープ形式で補間する。よってパラメータ依存型リアプノフ関数は次式で表すことができる。

$$P = \alpha_1 P_1 + \alpha_2 P_2 \tag{10}$$

これを時間微分したものは、

$$\dot{P} = \dot{\alpha_1} P_1 + \dot{\alpha_2} P_2 \tag{11}$$

となる。これらを定めたら、以下の手順でコントローラを求める。

- 新たな変数 $\dot{\alpha}_1, \dot{\alpha}_2$ についても変動範囲の上限、下限を定める。
- $\sin\theta\cos\theta\dot{\psi}$ の上限値、下限値を要素とする集合 Θ を定める。
- 同様に $\dot{\alpha_1}, \dot{\alpha_2},$ の上限値、下限値、を要素とする集合 Φ を定める

そして以下の LMI を解く。

$$\begin{bmatrix} \mathrm{He}[AP - B_2FP] + \dot{P} & * & * \\ C_1P - D_{12}FP & -\gamma I & * \\ B_1^T & D_{11}^T & -\gamma I \end{bmatrix} < 0 \tag{12}$$

ただし今示した A, F, P はそれぞれポリトープ形式の行列であり、$\dot{P}$ については式 (11) で示したものである。$\Theta \times \Phi$ に属する全ての要素を式 (12) の対応する変数に代入する。

以上の議論から、求めるべき変数は、$P_1 > 0, P_2 > 0, M_1, M_2$ の 4 つである。ただし

$$M_1 = F_1P_1, M_2 = F_2P_2 \tag{13}$$

であり、各フィードバックゲインは次式のようになる。

$$F_1 = M_1P_1^{-1}, F_2 = M_2P_2^{-1} \tag{14}$$

重み関数は最初の方法と同じのまま、この LMI を解いたところ以下のコントローラが求まった。

$$F_1 = \begin{bmatrix} 18.84 & -10.08 & 1.72 & -3.46 & -10.51 & 2.61 \\ -26.53 & 38.63 & -2.37 & 10.99 & 19.75 & -13.38 \end{bmatrix}$$

$$F_2 = \begin{bmatrix} 10.47 & -10.09 & 0.87 & 0.16 & -4.30 & 0.82 \\ 10.85 & 38.17 & -1.32 & 4.51 & -4.03 & -6.80 \end{bmatrix}$$

この 2 つの方法では、初めに求めたコントローラよりも後者のほうがハイゲインになっており、閉ループ系の固有値の実部も、より左側に位置した。また、γ の値も小さく収めることができた。

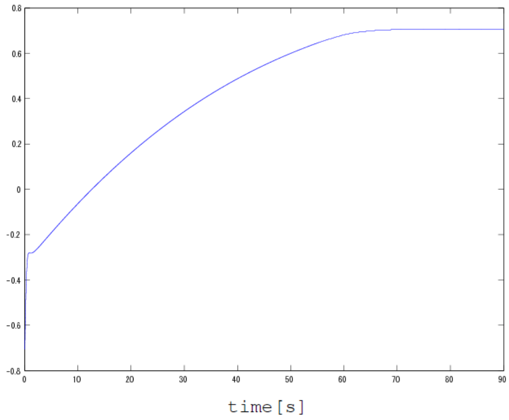

図 3 固定型による θ のシミュレーション

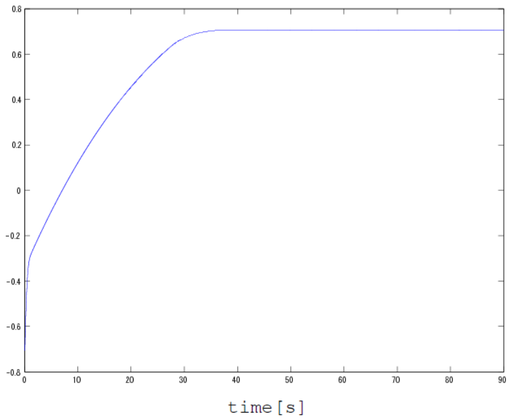

図 4 変数依存型による θ のシミュレーション

4 シミュレーションと考察

固定型リアプノフ関数に基づくコントローラと、変数依存型リアプノフ関数に基づくコントローラを用いて、2 自由度ヘリコプタのシミュレーションを行った。その結果を図 3、図 4 に示す。 どちらもオーバーシュートはなく、ゲインの高い変数型のほうが収束の早い結果となった。

5 おわりに

今後の課題として、今回シミュレーションでは上手くいったが、実プラントに適応したらあまり良い結果が得られなかったので、重みの再考、パラメータのとりかたなどを工夫する必要がある。また今回は変数が 1 つの場合で行ったが 2 つやそれ以上にも適応できることの確認が必要である。今回得られた成果を以下に示す。

- γ の値を小さくすることができた。
- 保守性の改善を図ることができた。

参考文献

[1] 藤森 篤:ロバスト制御．コロナ社，東京，2001

[2] 早瀬 雄太:H ∞制御理論を用いた 2 自由度ヘリコプタの姿勢制御，南山大学数理情報学部数理科学科論文，2009