システムにおける信頼度関数の近似式
-信頼度の上下限を用いて-

2007MI209 千田裕士
指導教員：尾崎俊治

1　はじめに

1.1　研究の背景

ソフトウェアやインターネットなどを構成しているシステムは，システム内の各要素の不具合などにより，必ずしも正常に稼働するとはいえない場合がある．そのため，システムが正常に稼働する確率である信頼度を知ることは非常に重要である．

1.2　研究の目的と方法

本論文では，システムの信頼度を導く手法について提案し，その妥当性について検証していくことを目的とする．信頼度の上下限という情報から正確な信頼度に近似させ，誤差を検証することで実際に近似式が適用できるかということについて議論していく．尚，この研究では計算と比較がしやすいようにシステムの構成要素は互いに独立であるとし，同一の信頼度を持つと仮定する．つまり，p=p_1=⋯=p_n とする．

2　信頼度の上下限

すべての信頼度 $r(p)$ は，直列構造のシステムと並列構造のシステムの間にあると定義し，制限する一般的な上下限があるが，本予稿では，より精度の高い最小パス集合，最小カット集合 (以下，最小パス・カット) という情報を考慮させた上下限について考えていく．

2.1　狭域的上下限

互いに独立した要素で構成されており，最小パス集合 $\mathbf{P}$=(P_1,⋯,P_s) と最小カット集合 $\mathbf{C}$=(C_1,⋯,C_k) を持つシステムの上下限は以下のように表される [1][2].

$$\prod_{j=1}^{k}[1-\prod_{i\in C_j}(1-p_i)] \le r(\mathbf{p}) \le 1-\prod_{j=1}^{s}[1-\prod_{i\in P_j}p_i] \tag{1}$$

2.2　近似的上下限

(1) 式の上下限では，最小パス・カットを全て求めることが前提条件となる．しかし，実際に使われるシステムは膨大な規模となるので，信頼度だけでなく最小パス・カットも算出することが困難になることが予想される．そこで，部分的なパス・カット ($s_1 \le s$)，($k_1 \le k$) を利用し，(1) 式に近似させた上下限を以下のように設定する [3].

$$1-\prod_{j=1}^{s_1}[1-\prod_{i\in P_j}p_i] \le r(\mathbf{p}) \le \prod_{j=1}^{k_1}[1-\prod_{i\in C_j}(1-p_i)] \tag{2}$$

尚，s_1，k_1 の選択方法は生起確率の大きいものから順に選ぶことが効率的な上下限値を得ることが明らかになっている [3].

3　上下限の検証

前節で記した (1)，(2) 式を図 1 の複雑な構造をもつモデルを例にとって検証する．実際に使われているシステムは大規模かつ構造が複雑なものになるので，それに近いもので検証することで実際に適用できるかということを検証する．

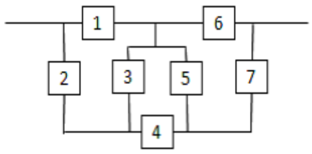


図 1　複雑な構造をもつシステム

このシステムの信頼度は，各最小パス集合から構成されている並列構造のシステムと捉えて求めることができる．

3.1　システムの正確な信頼度

最小パス集合は {1,6} {1,5,7} {1,3,4,7} {2,3,6} {2,4,7} {2,3,5,7} {2,4,5,6} となる．並列構造のシステムの構造式は，$\phi(x) = \max\{x_1, x_2, \cdots, x_n\} = 1-\prod_{i=1}^{n}(1-x_i)$ と表されるので，このシステムの構造式は以下のようになる．

$$\begin{aligned}\phi(x) = 1 &- (1-x_1x_6)(1-x_1x_5x_7)(1-x_1x_3x_4x_7)\\ &\times(1-x_2x_3x_6)(1-x_2x_4x_7)\\ &\times(1-x_2x_3x_5x_7)(1-x_2x_4x_5x_6)\end{aligned} \tag{3}$$

これを展開し，x はブール代数を扱っているため $x_i^n = x_i$ となり，$p = p_1 = \cdots = p_n$ より，信頼度は以下のように表される．

$$r(p) = p^2 + 3p^3 + p^4 - 12p^5 + 11p^6 - 3p^7 \tag{4}$$

3.2　信頼度の上下限の算出

(1) 式の方法を用いて上下限を求める．最小パス集合，最小カット集合より，$s = 7$，$k = 6$ となるので，(1) 式を適用すると以下のようになる．

$$\begin{aligned}&[1-(1-p)^2]^2[1-(1-p)^3]^2[1-(1-p)^4]^2 \le r(p)\\ &\qquad \le 1-[1-p^2][1-p^3]^3[1-p^4]^3\end{aligned} \tag{5}$$

次に，(2) 式の方法を用いて上下限を求める．ここでは s_1=3，k_1=2 を部分的なパス・カットに選び，(2) 式に適用させる．よって以下の上下限が得られる．

$$-2p^4 + 2p^3 + p^2 \leq r(p) \leq p^4 - 4p^3 + 4p^2 \qquad (6)$$

3.3　正確な信頼度との比較

各要素 p が 0 から 1 まで変化した時の信頼度 $r(p)$ の推移を比較したものを図 2，図 3 にそれぞれ示す．

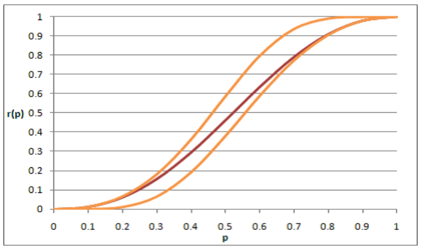


図 2　$r(p)$ と (5) 式の上下限の推移

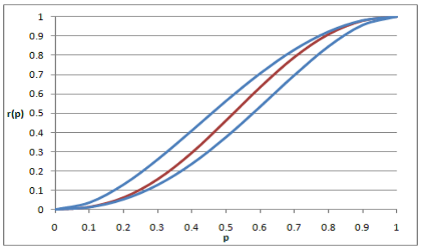


図 3　$r(p)$ と (6) 式の上下限の推移

(5) 式が従来の研究で知られている上下限であるが，(6) 式の近似した上下限についても十分に制限できていることが図から読み取ることができる．

4　近似式について

4.1　検証

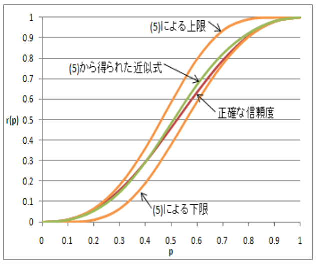
(5)，(6) 式を用いた上下限からシステムの信頼度に関する近似式を算出する．近似式は性質により，設定方法を変える．尚，上限を R_U，下限を R_L，各要素の信頼度を p とする．(5) 式の上下限と正確な信頼度の推移をみると，p=0 付近で正確な信頼度が上限に近い値をとり，p=0.5 付近で上下限の中央値となり，p=1 付近で下限に近い値をとり，$r(p)$=1 を得ることが分かる．よって，これを考慮して近似式を以下のように設定する [1]．

$$r(p) = pR_L + (1-p)R_U \qquad (7)$$

次に，(6) 式の上下限と正確な信頼度の推移をみると，p=0 付近で正確な信頼度が下限に近い値をとり，p=0.5 付近で上下限の中央値となり，p=1 付近で上限に近い値をとり，$r(p)$=1 を得ることが分かる．よって，これを考慮して近似式を以下のように設定する．

$$r(p) = pR_U + (1-p)R_L \qquad (8)$$

図 4，図 5 に，(7)，(8) 式の近似式と実際の正確な信頼度をそれぞれの上下限とともに示す．



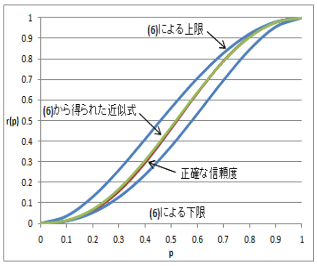


図 4　(5) 式による上下限と近似式 図 5　(6) 式による上下限と近似式

4.2　考察

(5) 式の上下限から導いた近似式の誤差は最大で p=0.624 のとき 0.038 となり，誤差平均は 0.013 をとる．また，(6) 式の上下限から導いた近似式の誤差は最大で p=0.372 のとき 0.013 となり，誤差平均は 0.0041 をとる．本来ならば，情報量の多い (5) 式の上下限から導いた近似式の方が正確な信頼度に，より近似できたものとなるはずであるが，この具体例での結果としては，(6) 式の上下限から導いた近似式が，より有効な近似ができたといえる．この具体例だからかもしれないが，結果からみると十分に実用性があるといえる．

5　おわりに

本研究では，日常で使われている複雑な構造をもつシステムを想定し，信頼度の上下限という情報から近似式を求め，正確な信頼度にどれだけ近似できるかについて研究してきた．そして新たに部分的なパス・カットから上下限を近似し，可能な限り計算量を減少させた場合についても検証してきた．しかし，各要素の信頼度が異なるものや，最小パス集合と最小カット集合の個数の差が大きいものなどの場合は，正確な信頼度と上下限との関係が変化してくるため，誤差が激しくなる場合もある．そういった場合のシステムに対しても適用できるような，正確な信頼度との誤差を修正できるような新たなモデルなどが必要となってくると考えられる．また，最小パス・カットを近似させた上下限についても，あらゆるシステム条件で適用させることも必要となってくるであろう．

参考文献

[1] Osaki, S. and Suzaki, M. (2010). A simple approximation formula for reliability functions. *Advanced Reliability Modeling* , edited by S. Chukova et al., pp.548-555, McGraw Hill, Taipei, 2010.

[2] Esary, J.D. and Proschan, F. (1963). Coherent structures of non-identical components. *Technometrics* 5, 191-209.

[3] 飯田恭敬，若林拓史，福島博．(1989).『道路網信頼性の近似解析法の比較研究』，土木学会論文集，第 407 号／ -11.