多項式零点の精度保証

2007MI162 中野 駿
指導教員：杉浦 洋

1 はじめに

本論文では多項式零点の精度保証付き計算法を，零点を包含する円板の計算として考える．従来，何らかの方法で求めた近似零点に，Smith の定理を適用してこのような円板を計算する方法が知られていた．関 [1] は，Smith の定理の基礎となる Gershgorin の定理を，Brauer の定理で置き換えることにより，Smith の定理を改良し Smith-Brauer の定理を提案した．我々の目標は，この Smith-Brauer の定理に基づく零点包含円板の計算法を開発することである．

2 Smith 円板による零点包囲

近似零点とそれに対する Weierstrass 法の修正量を用いると，Smith の定理により，近似零点を中心とし，真の零点を含む複素平面上の円板が得られる．これは，零点の精度保証付き計算に他ならない．

本論文では，中心 $c \in \mathbb{C}$ 半径 $r \geq 0$ の円板 D を $D = \langle c; r \rangle$ と表す．

代数方程式 (1) に対し，初期値を $z_1, z_2, \cdots, z_n$ とした Weierstrass 反復を

$$z_k^+ = z_k + \delta_k,$$

$$\delta_k = -\frac{P_n(z)}{\prod_{i \neq k}(z_k - z_i)} \qquad (1 \leq k \leq n) \tag{1}$$

とする．Smith は，行列の固有値の存在範囲に関する Gershgorin の定理を用いて，以下の定理を証明している．

[定理１](Smith) Smith の円板を，

$$G_k = \left\langle z_k^+; r_k \right\rangle \ \ , \ r_k = (n-1)\,|\delta_k| \tag{2}$$

と定義すると，

$$\zeta_i \in \bigcup_{k=1}^{n} G_k = G \tag{3}$$

となる．G の連結部分 D が m 個の円板から生成されるなら，D はちょうど m 個の解を含む．//

3 Brauer 橙形による零点包囲と関円板

[定理 3](Smith-Brauer)
Smith の定理の $r_k,(1 \leq k \leq n)$ を用いて，Brauer の橙形を

$$K_{kl} = \{z : |z - z_k^+||z - z_l^+| \leq r_k r_l\} \tag{4}$$

と定義すると，任意の $\zeta_i,(1 \leq i \leq n)$ について

$$\zeta_i \in \bigcup_{1 \leq k \leq l \leq n} K_{kl} = K \tag{5}$$

である．//

任意の $1 \leq k \leq l \leq n$ について，

$$K_{kl} \subset G_k \cup G_l \tag{6}$$

ゆえに，

$$K \subset G \tag{7}$$

が成立する．したがって，Smith-Brauer の方が強い制約を与えており，良い精度保証が得られる．

以下では簡単のためすべての Smith 円板が互いに交わらない場合について考える．

この時 Brauer の橙形 K_{ij} は２つの連結成分 K_{ij}^i と K_{ij}^j からなり

$$K_{ij} = K_{ij}^i \cup K_{ij}^j,\, K_{ij}^i \subset G_i,\, K_{ij}^j \subset G_j \tag{8}$$

である．

ゆえに零点 ζ_i の存在領域は

$$K_i = \bigcup_{j \neq i} K_{ij}^i \subset G_i \tag{9}$$

となる．

これは，精密な存在領域を与えるが，領域形状が複雑で実用にならない．関 [1] は K_{ij}^i を含む最小の円板が

$$D_{ij} = \langle m_{ij} + \rho_{ij} d_{ij}; \frac{r_i r_j\,|d_{ij}|}{\rho_{ij}} \rangle \tag{10}$$

$$m_{ij} = \frac{z_i^+ + z_j^+}{2},\ d_{ij} = \frac{z_i^+ - z_j^+}{2},$$
$$\rho_{ij} = \sqrt{1 + r_i r_j} + \sqrt{1 - r_i r_j}$$

であることを示した．これを関円板と呼ぶ．零点 ζ_i の存在領域は関円板により

$$\zeta_i \in D_i = \bigcup_{j \neq i} D_{ij} \tag{11}$$

と書ける．

4 円板群の最小包囲円板

前章の条件の下で，n 次多項式の零点は $n-1$ 個の関円板の和集合に含まれる．この関円板群を包囲する最小円板が計算できれば，簡潔で精密な零点の精度保証がえられる．この章では，m 個の円板群を包囲する最小円板を計算する一般的なアルゴリズムを与える．

複素平面上の m 個の円板を $D_i = \langle c_i; r_i \rangle (1 \leq i \leq m)$ とする．これらを内部に含む最小半径の円板 $D = \langle c; r \rangle$ を計算する．

以下では，点 α と円板 $D = \langle c; r \rangle$ との距離を

$$dist(\alpha, D) \equiv |c - \alpha| + r \tag{12}$$

で定義する．

<最小包含円板アルゴリズム>

(ステップ 1) 全ての円板を含む最小長方形領域を $R = \{z = x + iy : x_{min} \le x \le x_{max}, y_{min} \le y \le y_{max}\}$ とする．

R の中心 $\alpha = (x_{min} + x_{max})/2 + i(y_{min} + y_{max})/2$ から最も遠い円板を $\hat{D}_1$ とする．すなわち，

$$dist(\alpha, \hat{D}_1) = \max_{1 \le i \le m} dist(\alpha, D_i) \tag{13}$$

である．$D = \langle c; r \rangle = \hat{D}_1$ とし，もし $D \supset \cup_{i=1}^{m} D_i$ なら終了．そうでなければステップ 2 に進む.

(ステップ 2)c から最も遠い円板を $\hat{D}_2$ とする．$\hat{D}_1, \hat{D}_2$ の最小包含円板を $D = \langle c; r \rangle$ とする．ここで，もし $D \supset \cup_{i=1}^{m} D_i$ なら終了．そうでなければステップ 3 に進む.

(ステップ 3) c から最も遠い円板を $\hat{D}_3$ とする．$\hat{D}_1, \hat{D}_2, \hat{D}_3$ の最小包含円板を $D = \langle c; r \rangle$ とする．ここで，もし $D \supset \cup_{i=1}^{m} D_i$ なら終了．そうでなければステップ 4 に進む.

(ステップ 4)c から最も遠い円板を $\hat{D}_4$ とする．$\hat{D}_1, \hat{D}_2, \hat{D}_3, \hat{D}_4$ の最小包含円板を $D = \langle c; r \rangle$ とする．
ここで，もし $D \supset \cup_{i=1}^{m} D_i$ なら終了．そうでなければステップ 4 に戻る．//

ステップ 4 では，$\hat{D}_2, \hat{D}_3, \hat{D}_4$ と $\hat{D}_1, \hat{D}_3, \hat{D}_4$ と $\hat{D}_1, \hat{D}_2, \hat{D}_4$ の三組に対する最小包含円板の中で，最大のものを選ぶ．ステップ 4 の反復は，m 個の円板から選んだ 3 つの円板の最小円板 D を更新するが，その半径が狭義単調増加するので，高々有限回で終了する．反復回数の上限は ${}_mC_3 = O(m^3)$ である．これは m が大きくなると膨大な数となる．しかし，数値実験によれば収束は極めて速い.

5　精度保証の実験

この章では Mathematica ver.6.0 上で実際に Smith-Brauer の定理に基づく零点の包含円板を計算した．仮にこれを中野円板と呼ぶ．また，Smith 円板と比較することにより，今回の中野円板の有効性を検証する．

5.1　実験概要

この実験で使用したモニックな n 次複素多項式は

$$f(z) = z^4 - 1 = 0 \tag{14}$$

である．

この多項式の解は $z = -i, i, -1, 1$ である．

適当な近似零点 $z_i (1 \le i \le n)$ が与えられたとする．ここで，この近似零点に関する Smith 円板は互いに交わらないこととする．

1.Smith 円板の計算

$$G_k = \{z : |z - z_k^+| \le r_k\},$$
$$r_k = (n-1)|\delta_k|$$

2. 関円板 D_{kl}, D_{lk} の計算.

式 (11) に基づき，関円板 $D_{kl}, D_{lk} (1 \le k \le n, 1 \le l \le n, k \ne l)$ を計算する．これにより，

$$\zeta_k \in \cup_{l=1, l \ne k}^{4} D_{kl} = D_k. \tag{15}$$

3. 中野円板 B_k の計算．もちろん $\zeta_k \in D_k \subset B_k$ となる．

4. 最終的に Smith 円板 G_k と中野円板 B_k を比較し，どれだけ精度が良いか検証する．

5.2　実験結果

近似解 $1 - 0.15, -1 + 0.15, i - 0.15i, -i + 0.15i$ を与える．

そして円板を作ると半径の最大値は表のようになった (表 1).

表 1

	Smith 円板	中野円板
半径	0.58375	0.273878

この表から Smith 円板に比べて中野円板は 2 倍以上も精度が良くなったことがわかる．

近似解 $1 - 0.05, -1 + 0.05, i - 0.05i, -i + 0.05i$ を与える．

Smith 円板の半径が小さくなると中野円板の半径も小さくなった (表 2).

表 2

	Smith 円板	中野円板
半径	0.162263	0.0187195

表 2 を表 1 と比べると，Smith 円板の半径は 1/3 にしかならないが，中野円板の半径は 1/15 になっている．

このことから Smith 円板の半径が小さくなるほど中野円板の半径が急激に小さくなることがわかる．

6　おわりに

今回の研究によって Weierstrass 法，Gershgorin の定理，昨年の関が改良した Smith-Brauer の定理を応用し，円板群の最小包含円板アルゴリズムと組み合わせて零点の存在領域を 1 つの最小円で表すことができた．

今回は，Smith 円板が分離していることを仮定したが，それを仮定しない一般的な状況での精度保証が今後の課題である．

参考文献

[1] 関万梨子:「多項式の零点に対する Smith の定理の改良」，南山大学数理情報学部情報システム数理学科, 2009.

[2] 山本哲朗:「数値解析入門 [増訂版]」．サイエンス社, 2005.

[3] 大石進一:「制度保証付き数値計算」．コロナ社,2000.