2次安定化によるクレーンジブシステムのゲインスケジューリング制御

2007MI146 村上　恵介

指導教員：高見　勲

1　はじめに

実社会において制御対象のモデルが変化する事はごく当然のことであり，この変化に合わせて制御器も変化させることで性能を向上させることが効果的であると考えられる．このような制御方法はゲインスケジュール制御と呼ばれる．本研究では実機にクレーンシステムを使用し，スチールケーブルの長さの変動に対して H_∞ 制御を用いたゲインスケジューリングを行う [1].

2　制御対象

本研究で用いるクレーンシステムは，タワーの角度，トロリーの位置, スチールケーブルの長さの３つを制御しスチールケーブルで吊るしたペイロードを目標地まで移動させるものである．本研究ではタワーの角度は固定し，スチールケーブルの長さ $\theta_p[m]$ を変化させながらペイロードの位置 $x_p[m]$ を制御する．ジブの位置 $x_j[m]$ とスチールケーブルの振れ角 $\gamma[rad]$ はセンサーで測ることができる．入力はジブモーターへの電流 $I_{m,j}$ $[A]$ で, 出力の x_p はセンサーで直接測ることはできないが,γ(t) を微小とし近似線形化した $x_p(\mathrm{t}) = x_j(\mathrm{t}) - \theta_p\gamma(\mathrm{t})$ で与えられる．ケーブルの変動範囲は $0.25[\mathrm{m}] \leq \theta_p \leq 0.75[\mathrm{m}]$ とする．状態量を $x(t) = [x_j(t)\gamma(t)\ \ \dot{x}_j(t)\ \ \dot{\gamma}(t)]^T$ 入力を $u = I_{mj}$ としたとき，状態空間表現は次式となる．

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) \end{cases} \tag{1}$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1.7001 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-11.5101}{\theta_p} & 0 & 0 \end{bmatrix} B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 18.2592 \\ \frac{18.2592}{\theta_p} \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & -\theta_p & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{2}$$

3　ゲインスケジューリング制御

プラントから測定される可変パラメーター θ_p に応じてあらかじめ定められたコントローラーパラメーターの変更テーブルに従って，コントローラーを修正する．

可変パラメーターに対して状態空間表現を次式の線形パラメーター可変（LPV）システムで表現する．A，B，C は (2) に同じ．

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A(\theta_p)x(t) + Bu(\theta_p)u(t) \\ y(t) = C(\theta_p)x(t) \end{cases} \tag{3}$$

4　同値変換

(2) で示した状態空間表現 A, B の値は変動する $\frac{1}{\theta_p}$ の値に依存している．しかし C の値は θ_p の値に依存している．つまり A,B の値は非線形に依存し，C の値は線形に依存している，この３つの値を全て線形に扱いゲインの内挿を行うために同値変換を行う．(1) に対し，新たに状態変数 $\bar{x}(t) = [x_1(t)\quad \bar{x}_2(t)\quad \cdots\quad \bar{x}_n(t)]^T$ を式 $\bar{x}(t) = Tx(t)$ より導入する．ただし，T は正則な n 次正方行列．$x = T^{-1}\bar{x}$ であるから, これを (1) 式に代入すると

$$\begin{cases} \dot{\bar{x}}(t) = TAT^{-1}\bar{x}(t) + TBu(t) \\ \bar{y}(t) = CT^{-1}\bar{x}(t) \end{cases} \tag{4}$$

となる．したがって (4) 式において $\bar{A} = TAT^{-1}$，$\bar{B} = TB$，$\bar{C} = CT^{-1}$ と置くと，(4) 式は (1) 式と同じ形になる．$T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \theta_p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \theta_p \end{bmatrix}$ とすると

$$TAT^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{-1.7001}{\theta_p} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-11.5101}{\theta_p} & 0 & 0 \end{bmatrix} TB = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 18.2592 \\ 18.2592 \end{bmatrix}$$

$$CT^{-1} = [\ 1 \quad -1 \quad 0 \quad 0\ ] \tag{5}$$

となり TAT^{-1} が $\frac{1}{\theta_p}$ の値に依存し，TB,CT^{-1} の値は θ_p に依存しない形となる．ここで $\frac{1}{\theta_p}$=σ_p とすると，プラントは σ_p の値に線形に依存する形となる．

5　ポリトープシステム

σ_p だけが変動する時 σ_p=$\alpha_1\sigma_{0.25}$+$\alpha_2\sigma_{0.75}$ を上で求めた (4) へ代入することで行列をポリトープ形式で表現する．（σ_p の変動範囲は $\frac{1}{0.3} \leq \sigma_p \leq \frac{1}{0.8}$ ）

$$\dot{\bar{x}}(t) = \left(\sum_{i=1}^{2} \alpha_i (TAT^{-1})_i \right) \bar{x} + TBu(t), \alpha_i \geq 0, \sum_{i=1}^{2} \alpha_i = 1 \tag{6}$$

(6) に定数状態フィードバック u=$\sum_{i=1}^{2} \alpha_i K_i T^{-1}\bar{x}$ を代入すると

$$\dot{\bar{x}}(t) = \left(\sum_{i=1}^{2} \alpha_i (TAT^{-1})_i + \sum_{i=1}^{2} TB(\alpha_i K_i)T^{-1} \right) \bar{x}, \alpha_i \geq 0, \sum_{i=1}^{2} \alpha_i = 1 \tag{7}$$

となる．

6　2次安定条件

システム集合　$\dot{x}(t) = A(\theta)x$,(θ は変動パラメータ) としリアプノフ安定論，状態漸近収束の条件,
$V(x) = x^T Px > 0\ \forall x \neq 0$,(P は正方対称行列)
$\dot{V}(x,\theta) = x^T(A^T(\theta)P + PA(\theta))x < 0\ \forall x \neq 0, \theta$
から２次安定条件は

$$\exists P > 0,\ A^T(\theta)P + PA(\theta) < 0 \tag{8}$$

となる．

7 制御系設計

7.1 H_∞ 制御による制御系設計

H_∞ ノルムを LMI を用いて評価するために一般化制御対象を導出する．目標に偏差なく素早く追従するための積分器の重み W_e を設計し，P_p を変動するプラントとした．状態変数を $[x_p x_e]^T$ とし $G(s)$ を導出する．$G(s)$ を用いて変動の上限，下限となる $P_{0.25}, P_{0.75}$ におけるフィードバックゲインを LMI を解くことにより求めると．以下となった．

$K_{0.25}$=[-5.1876 -26.7066 -3.3358 1.6432 1.5586]

$K_{0.75}$=[-3.8034 -17.1533 -2.3814 1.4356 1.1710]

7.2 ゲインの内挿

4 で示した同値変換により，状態空間表現の空間次元は一致しており，σ_p の変動に依存している．今，状態空間表現は 1 次の σ_p の関数であるので，コントローラーパラメーターも 1 次直線に従って変更する．変動の端点のゲイン $K_{0.25}$,$K_{0.75}$ の値から変動する σ_p に対するゲイン K_p を直線の公式から内挿により求める変動テーブルのコントローラーは以下のようになる．

$$K_p = \frac{K_{max} - K_{min}}{\sigma_{max} - \sigma_{min}}(\sigma_p - \sigma_{min}) + K_{min} \qquad (9)$$

8 クレーンシステムの 2 次安定化

(7) で示したクレーンシステムの状態空間表現のポリトープ形式を 6 章で示した 2 次安定条件により安定性を保証する．クレーンシステムの 2 次安定条件は (7)(8) より以下となる．

$$\exists K, P > 0, \sum_{i=1}^{2} \alpha_i = 1,$$
$$(\sum_{i=1}^{2} \alpha_i (TAT^{-1})_i + \sum_{i=1}^{2} TB\alpha_i K_i T^{-1})^T P$$
$$+P(\sum_{i=1}^{2} \alpha_i (TAT^{-1})_i + \sum_{i=1}^{2} TB\alpha_i K T^{-1}) < 0 \qquad (10)$$

α_1,α_2 の値を設定し，範囲内で $(TAT^{-1})_i$ を表現する．(10) が成り立つ時クレーンシステムは σ_p の変動範囲，$\frac{1}{0.25} \leq \sigma_p \leq \frac{1}{0.75}$ 内に置いて 2 次安定性が保証される．ここで $\alpha_2 = 0$ とすると．$\sum_{i=1}^{2} \alpha_i = \alpha_1 + 0 = 1$ となり (10) は以下となり，変動の最小の 2 次安定条件である．

$$\exists K, P > 0 \quad ((TAT^{-1})_1 + TBK_1T^{-1})^T P$$
$$+P((TAT^{-1})_1 + TBK_1T^{-1}) < 0 \qquad (11)$$

また $\alpha_1 = 0$ とすると．$\sum_{i=1}^{2} \alpha_i = 0 + \alpha_2 = 1$ となり (10) は以下となり，これは変動の最大の 2 次安定条件である．

$$\exists K, P > 0 \quad ((TAT^{-1})_2 + TBK_2T^{-1})^T P$$
$$+P((TAT^{-1})_2 + TBK_2T^{-1}) < 0 \qquad (12)$$

変動の最大，最少，の 2 次安定条件が (10) を満たすような P は

$$P = \begin{bmatrix} 0.1241 & 0.0626 & 0.0242 & -0.0226 \\ 0.0626 & 0.5958 & 0.0515 & -0.0439 \\ 0.0242 & 0.0515 & 0.0226 & -0.0207 \\ -0.0226 & -0.0439 & -0.0207 & 0.0208 \end{bmatrix} \qquad (13)$$

が存在し (11)(12) を満たす事が確認できた．また P の固有値は [0.0009　0.0271　0.1223　0.6129] となり $P > 0$ を満たしている．これにより下式 $\alpha_1(11) + \alpha_2(12) < 0$ も成り立ち，$\frac{1}{0.25} \leq \sigma_p \leq \frac{1}{0.75}$ 内に置いて (10) の 2 次安定性が保証できた．

$$\alpha_1 + \alpha_2 = 1, \quad \exists K, \exists P > 0$$
$$\alpha_1(((TAT^{-1})_1 + TBK_1T^{-1})^T P$$
$$+P((TAT^{-1})_1 + TBK_1T^{-1}))$$
$$\alpha_2(((TAT^{-1})_2 + TBK_2T^{-1})^T P$$
$$+P((TAT^{-1})_2 + TBK_2T^{-1})) < 0 \qquad (10)$$

9 シュミュレーション

目標値を 0.3[m] とした時，σ_p の長さを 0.25, 0.5, 0.75 で固定して目標値まで移動させた図とスチールケーブルの長さを 10 秒かけて 0.75[m] から 0.25[m] にまで変化させ目標値まで移動させた図を以下に示す．

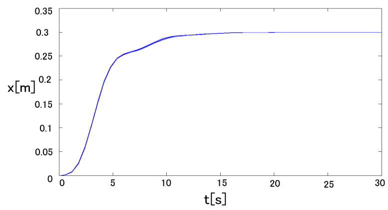

図 1　シュミュレーション結果

どのシュミュレーションでもほぼ同じ応答を得る事ができた．

10 実験

シュミュレーションと同じように実験を行った．

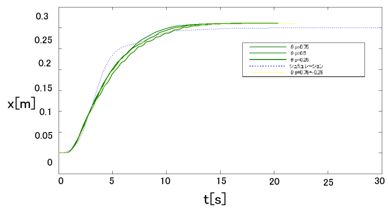

図 2　実験結果

それぞれの実験結果に多少の応答の差は見られたが収束までの時間はほぼ同時となった．シュミュレーションの結果とも応答の違いが出てしまったが，収束までの時間はほぼ同じ結果が得られた．しかし 20 秒かかっても定常偏差が残ってしまった．この原因としてモデリングに考慮していないトロリーとクレーンとの間の摩擦が原因と考えられる．

11 おわりに

スチールケーブの変動 $0.25 \leq \theta_p \leq 0.75$ に対して 2 次安定性を保証することが出来た．端点 θ_{min}，θ_{max} のゲインを求めることで内層を行い，中間の地点のゲインを求めゲインスケジューリング制御できた．ゲインスケジューリング制御により決められた範囲内でスチールケーブルの長さの変動に対してのロバスト性を保証し実験を行う事が出来た．

参考文献

[1] 藤森篤：ロバスト制御，コロナ社，(2001)