最良有理式近似のためのRemesの第2算法の実現

2007MI139 宮脇豊子

指導教員：杉浦洋

1 はじめに

与えられた区間 $[a, b]$ における関数 $f(x)$ を計算するために，$f(x)$ の有理近似が使われる．次数を固定したとき，区間 $[a, b]$ における絶対誤差の最大値が最小となる有理近似を最良近似という．有理関数近似を構成する方法は，次数を固定した場合，最も誤差の小さい最良近似を取り上げる．また，昨年の佐橋 [2] による最良多項式近似プログラムの作成に引き続き，Remes の第 2 算法に基づいて，与えられた被近似関数の最良有理近似式を求めるプログラムを作成する．

2 最良近似とミニマックス近似におけるチェビシェフの定理

区間 $[a, b]$ において，連続関数 $f(x)$ を次数 (m, k) の既約な有理式

$$f_{mk}(x) = \frac{p_m(x)}{q_k(x)} = \frac{\displaystyle\sum_{j=0}^{m} a_j x^j}{\displaystyle\sum_{j=0}^{k} b_j x^j} \tag{1}$$

で近似する問題を考える．誤差の指標を区間における最大絶対誤差

$$r_{mk} = \max_{a \le x \le b} |f(x) - f_{mk}(x)| \tag{2}$$

とする．次数 (m, k) を固定したとき，最大絶対誤差 r_{mk} を最小にする有理関数近似 $f_{mk}(x)$ をミニマックス近似，あるいは最良近似という．

[定理 1](チェビシェフの定理)

有限区間 $[a, b]$ における連続関数 $f(x)$ の (m, k) 次最良近似は存在して一意である．その最良近似式が実質 $(m - \nu, k - \mu)$ 次であったとして

$$f^*_{mk}(x) = \frac{\displaystyle\sum_{j=0}^{m-\nu} a_{j+\nu} x^j}{\displaystyle\sum_{j=0}^{k-\mu} b_{j+\mu} x^j} = \frac{p^*_m(x)}{q^*_k(x)} \tag{3}$$

とする．ここで，$a_m, b_k \neq 0$ である．そして，その誤差を

$$e^*_{mk}(x) = f^*_{mk}(x) - f(x)$$

と書く．また，その最大絶対誤差を r^*_{mk} とし，$r^*_{mk} \neq 0$ を仮定する．このとき，区間 $[a, b]$ の点列 ζ_1，$\cdots$，ζ_L が存在して，

(1)$L = m + k + 2 - d \quad , d = \min(\mu, \nu)$

(2)$\zeta_1 < \zeta_2 < \zeta_3 < \cdots < \zeta_L$

(3)$|e^*_{mk}(\zeta_i)| = r^*_{mk} (1 \le i \le L)$

(4)$e^*_{mk}(\zeta_i) e^*_{mk}(\zeta_{i+1}) < 0$

である．//

r^*_{mk} を最良近似度という．最良近似式の誤差 $e^*_{mk}(x)$ は絶対値が r^*_{mk} で符号の交代する L 個の極値点をもつ．とくに，$k = 0$ の多項式近似では $L = m + 2$ である．

3 Remes の第 2 算法の構成

Remes の第 2 算法は，定理 1 式 (2.3) の最良近似を構成するアルゴリズムである．定理 1 で $d \neq 0$ の最良近似 $r^*_{mk}(x)$ はより低い次数設定で得られるので，$d = 0$ を仮定する．すなわち，r^*_{mk} は少なくとも $N + 2 = m + k + 2$ 個の符号交代する極値点を持つとする．また，一般性を失わず $b_0 = 1$ が固定できるよう区間 $[a, b]$ が $x = 0$ を含むとする．このアルゴリズムの入出力は，

入力：区間 $[a, b]$．被近似関数 $f(x)$．次数 (m, k)，

出力：(m, k) 次最良近似 $r^*_{mk}(x)$

である．

Remes の第 2 算法は次の 4 ステップから成る．以下，$N = m + k$ とする．

ステップ 1：初期近似式の構成

初期近似式

$$r^{(0)}_{mk}(x) = \frac{\displaystyle\sum_{j=0}^{m} a^{(0)}_j x^j}{1 + \displaystyle\sum_{j=1}^{k} b^{(0)}_j x^j} \tag{4}$$

を誤差 $e^{(0)}_{mk}(x) = f(x) - r^{(0)}_{mk}(x)$ が $N + 2$ 個の極値点 $a \le x^{(0)}_0 < x^{(0)}_1 < \cdots < x^{(0)}_{N+1} \le b$ において，符号交代するように構成する．

ステップ 2：近似式の改良

$N + 2$ 個の未知数 $a_0, \cdots, a_m, b_1, \cdots, b_k, E$ に関する非線型方程式

$$f(x^{(0)}_i) - \frac{\displaystyle\sum_{j=0}^{m} a_j (x^{(0)}_i)^j}{1 + \displaystyle\sum_{j=1}^{k} b_j (x^{(0)}_i)^j} = (-1)^i E \ , (0 \le i \le N+1), \ b_0 = 1 \tag{5}$$

を解く．解を $a^{(0)}_0, \cdots, a^{(0)}_m, b^{(0)}_1, \cdots, b^{(0)}_k, E^{(0)}$ とする．$|E^{(0)}|$ は $x^{(0)}_i$ のそれぞれの近似誤差の絶対値である．

ステップ 3：誤差の極値点と極値の計算

$$e^{(0)}_{mk}(x) = f(x) - \frac{\displaystyle\sum_{j=0}^{m} a^{(0)}_j x^j}{\displaystyle\sum_{j=0}^{k} b^{(0)}_j x^j}, \quad b^{(0)}_0 = 1 \tag{6}$$

を定める．関数 $e_{mk}^{(0)}(x)$ は $x_i^{(0)}, i=0,\cdots,N+1$ で符号交代する絶対値 $|E^{(0)}|$ を持つ．したがって，$e_{mk}^{(0)}(x)$ はそれぞれの $x_i^{(0)}$ の近傍で誤差 $f(x)-r_{mk}^{(0)}(x)$ のように同じ符号の極値を持つ点 $x_i^{(0)}$ があることを示すことは容易である．$x_i^{(0)}$ を対応する $x_i^{(1)}$ で置換する．もし，$e_{mk}^{(0)}(x)$ が最大絶対値を持つ点 $\bar{x}$ が $x_i^{(1)}$ の 1 つであるならば，ステップ 4 に進む．そうでなければ，$e_{mk}^{(0)}(x)$ が $x_i^{(1)}$ で符号交代するよう，$x_i^{(1)}$ の 1 つを $\bar{x}$ に置換する．これを繰り返す．
ステップ 4：(3.2) 式の $x_0^{(1)},\cdots,x_{N+1}^{(1)}$ 点を用いてステップ 2，3 を繰り返す．(3.2) 式の一連の有理近似は初めの極値 $x_i^{(0)}, i=0,\cdots,N+1$ が $r_{mk}^*(x)$ の対応する極値に十分近いなら，r_{mk}^* は一様に収束する．

4　プログラム

Remes の第 2 算法に基づき，最良有理近似式を求めるプログラムを作成した．区間 $[a,b]$ 上の解析的な関数 $f(x)$ が有限個の極値点 $(\eta)_{i=1}^M$ を持ち，しかも符号交代する長さ L の極値の列を持つことを仮定する．その上で，この $f(x)$ について以下の 4 条件 P を満たす列 $(\xi)_{i=1}^L$ を構成する．
〈条件 P〉
(イ) $\xi_1<\xi_2<\cdots<\xi_{n+2}$,
(ロ) Sign $f(\xi_{i+1})$ =-Sign$f(\xi_i)$　$(1\le i\le n+1)$,
(ハ) $\max\limits_{1\le i\le n+2}|f(\xi_i)|=\max\limits_{1\le i\le M}|f(\eta_i)|$,
(ニ) 上記 3 条件を満たす点列の中で $\min|f(\xi_i)|$ が最大.
アルゴリズムは 2 つの段階からなる．まず第 1 段では，区間 $[a,b]$ における関数 $f(x)$ の極値点全体からなる集合 X を求める．第 2 段で上記の条件 P を満たす極値点列を選抜する．
(極値点集合の構成〉
区間内点 $x\in(a,b)$ が定数でない解析関数 $f(x)$ の極値点である条件は，$f'(x)=0$ かつ x で $f(x)$ が下に凸あるいは上に凸であることである．次の命題は，(a,b) の部分開区間が極値点を含むための十分条件を示す．[命題 1] f は開区間 (a,b) で解析的とする．区間上の 3 点 $u<v<w$ が

$$(f(v)-f(u))(f(w)-f(v))<0\cdots(A)$$

を満たすとき，開区間 (u,w) は f の極値点を含む．//
[アルゴリズム 1] 許容誤差 $\varepsilon>0$ での極値点の計算
1.　区間 $[u,v]$,$[v,w]$ の長い方の二等分点 r をとる．
ここでは $[u,v]$ の方が長いとし，$r=(u+v)/2$ とする．
2.　条件より，
$(f(r)-f(u))(f(v)-f(r))<0\quad\cdots(1)$
$(f(v)-f(r))(f(w)-f(v))<0\cdots(2)$
のいずれかが成立する．
(1) が成立すれば，u,v,w を u,r,v で置き換える．
(2) が成立すれば，u,v,w を r,v,w で置き換える．
いずれにせよ，命題 A より新しい区間 $[u,w]$ は f' の零点も含む．
3.　2 を区間幅 $w-u\le 2\varepsilon$ となるまで繰り返し，$\xi=(u+w)/2$ を解とする．//
命題 1 とアルゴリズム 1 より区間 $[a,b]$ 内の関数 $f(x)$ の極値点をすべて求める，次のアルゴリズムが得られる．

[アルゴリズム 2] 区間 $[a,b]$ 内の $f(x)$ の極値点のリスト Y を作成．
(1)　十分大きな N をとり $[a,b]$ 上の Chebyshev 点

$$x_i=\frac{a+b}{2}-\frac{b-a}{2}\cos\pi iN,\quad(a\le i\le N)\qquad(7)$$

をとる．$a=x_0<x_1<\cdots<x_N=b$ である．
(2)　リスト Y に端点 a,b を登録．
(3)　$1\le i\le N$ で，$(f(x_i)-f(x_{i-1}))(f(x_{i+1})-f(x_i))<0$ なら命題 1 より区間 $i=[x_{i-1},x_{i+1}]$ に極値点が存在する．これをアルゴリズム 1 で求めて Y に登録．//
次に，アルゴリズム 2 で生成したリスト Y から条件 P を満たす点列 $\xi_1<\xi_2<\cdots<\xi_L$ を選び出す．
[アルゴリズム 3] 点列 $(\xi)_{i=1}^L$ の選出
(1)　$m=L$ とする．
(2)　Y から極値の絶対値が大きい順に m 個の極値点を選び出し，その集合を Z とする．
(3)　集合 Z の要素を小さい順に並べ，その極値が $L-1$ 回以上の符号交代がしていれば，(4) へ．そうでなければ，$m=m+1$ として (2) へ．
(4)　Z の要素を小さい順に並べると，それらは極値の符号により L 個または $L+1$ 個のクラスタに分かれる．それぞれのクラスタから，極値の絶対値が最大の極値点を一つずつ選出してリスト X とする．X の要素は小さい順に並べておく．もし，$|X|=L$ なら X が求めるリストである．$|X|=L+1$ なら，X の最初の要素と最後の要素のうち，絶対値の小さいほうを取り除いて新たにそれを X とする．

5　実験結果

被近似関数 $f(x)=e^x$, $(x\in[0,1])$,$f(x)=\sin\frac{\pi}{4}x$, $(x\in[0,1])$,$f(x)=\cos\frac{\pi}{4}x$, $(x\in[0,1])$ はそれぞれ $(m,k)=(5,5)$ 次で最大絶対誤差 $r_{5,5}^*=7.8156\times10^{-17}$，$(m,k)=(9,2)$ で $r_{9,2}^*=2.2260\times10^{-18}$，$(m,k)=(9,2)$ で $r_{9,2}^*=5.8001\times10^{-18}$ となった．

6　おわりに

今回の研究により，佐橋論文 [2] を参考に Remes の第 2 算法に基づいて最良有理近似式を求めるプログラムを作成することができた．それにより基本的な初等関数である指数関数，sin 関数,cos 関数の最良近似有理式を求めることに成功した．いずれの場合もプログラムは正常に終了し，最良近似有理式を求めることに成功した．相対精度の最良近似を構成するプログラムを作成する事とプログラムを自動化させることを今後の課題とする．

7　参考文献

[1] Anthony Ralston and Philip Rabinowitz: A First Course in Numerical Analysis,　Second Edition, Dover Publications,　New York,　2001.
[2] 佐橋加奈子，最良近似式のための Remes の第 2 算法，南山大学数理情報学部情報システム数理学科 2009 年度卒業論文，2010.