実証明とシークエント

2007MI131 松浦聖史

指導教員：佐々木克巳

1 はじめに

本研究は，実際の証明とシークエントの関係の理解を深めることを目的とする．実際の証明には,Velleman[1] および松井 [2] で紹介されている『使える性質-導く性質』の表を用いる．一方，シークエントは,『使える性質-導く性質』の表の形式表現と捉えることができる概念である．このシークエントを基本概念として,「証明を構成する」ことを形式化した体系が知られている. シークエント方式とは, この体系にしたがって証明を構成する方式である. 卒業論文では,『使える性質-導く性質』の表を用いた方式とシークエント方式を比較し，双方の特徴について考察した．

本稿では，まず,『使える性質ー導く性質』の表を用いた方式とシークエント方式を導入する．その後，対象とする実例に対して,『使える性質ー導く性質』の表を用いた方式とシークエント方式の二つの方法で証明を与える．与えた証明を『使える性質-導く性質』の表を用いた方式にそって比較する．

2 『使える性質-導く性質』の表を用いた方式とシークエント方式

松井 [2] では,

「実数 a, b において, $0 < a < b$ ならば, $a^2 < b^2$」

の証明を考察する中で次のように述べている．

証明をするときは, 使える性質と導く性質をハッキリさせることが大事です. 例えば, このように書きます.

表

使える性質	導く性質
a, b は実数	$a^2 < b^2$
$0 < a < b$	

このような表を『使える性質-導く性質』の表という．さらに, 松井 [2] では, この表に基づく証明を与えている. 本研究で扱う実際の証明とは, この形での証明とする．

一方，シークエント方式は，佐々木 [3] の体系 SNK にしたがう．ここでは，その中の 4 つの推論規則のみを示しておく（図 2）．

$$\frac{\Gamma \to B}{\{A\} \cup \Gamma \to B}(w\text{ 左}) \qquad \frac{\Gamma \to A \quad \{A\} \cup \Gamma \to \Delta}{\Gamma \to \Delta}(cut)$$

$$\frac{\Gamma \to A}{\{\neg A\} \cup \Gamma \to \perp}(\neg\text{左}) \qquad \frac{\{A\} \cup \Gamma \to \perp}{\Gamma \to \neg A}(\neg\text{右})$$

図 2

また，今回のシークエント方式での証明では，(w 左) を適宜省略し，R を実数全体の集合とする．

3 実例比較

ここでは，対象とする実例に対して，以下の (ア),(イ),(ウ) の手順で比較を行う．その実例は全て松井 [2] からの引用であり，(ア) の証明は松井 [2] にしたがう．

(ア) 松井 [2] における表を用いた証明

(イ) シークエント方式での証明

(ウ) 比較

実例 1 非負実数 a, b が $b^2 \leq a^2$ を満たすならば, $b \leq a$ を満たす．

(ア) 表を用いた証明

まず, この問題を表に整理すると表 1 となる．

表 1

使える性質	導く性質
$a \in R$	$b \leq a$
$b \in R$	
$0 \leq a$	
$0 \leq b$	
$b^2 \leq a^2$	

この表より, 次の証明が導かれる．

証明：$b^2 \leq a^2$ より, $0 \leq a^2 - b^2$ が成り立つ. $0 \leq a$ と $0 \leq b$ より, $a + b$ は実数であって, $0 \leq a + b$ が成り立つ．ゆえに, $0 \leq (a-b)(a+b)$ と $0 \leq a + b$ より，実数 $a - b$ は $0 \leq a - b$ を満たす．

$$\dfrac{\dfrac{\{0 \leq a, a < b\} \Rightarrow a^2 < ab \qquad \dfrac{\{0 \leq b, a < b\} \Rightarrow ab < b^2 \quad \{a^2 < ab, ab < b^2\} \Rightarrow^{(2)} a^2 < b^2}{\{\Gamma, a < b, a^2 < ab\} \Rightarrow a^2 < b^2}(cut)(ii)}{\dfrac{\{\Gamma, a < b, a^2 < ab\} \Rightarrow a^2 < b^2}{\{\Gamma, b^2 \leq a^2, a < b\} \Rightarrow \perp}(\neg\text{左})}(cut)(i)}{\{a \in R, b \in R, 0 \leq b, 0 \leq a, b^2 \leq a^2\} \Rightarrow^{(1)} b \leq a}(\neg\text{右})$$

図 1

(イ) シークエント方式での証明

まず，与えられた命題をシークエントで表現する．そして，推論規則を積み上げていくと，図 1 を得る．ただし，記号列“ $a \in R, b \in R, 0 \le b, 0 \le a$ ”をΓとおく．また, $c \le d$ の否定を $c > d$ と約束する．図 1 における推論規則 $(i), (ii)$ の意味は以下のとおりである．

(i) $a^2 < ab$ の導入

(ii) $ab < b^2$の導入

(ウ) 比較

(ア) と (イ) を比較するため，図 1 における，2 つのシークエント (1),(2) を (ア) の表で表わすと, それぞれ表 1, 表 2 となる．

表 2

使える性質	導く性質
$a^2 < ab$	$a^2 < b^2$
$ab < b^2$	

ここから，次のことが確認できた．

(ア) の表は, $a^2 < ab$ の導入や $ab < b^2$の導入が表記されていない.そのため,表を見ただけではどの文からどの文を導いたのかが不明確である．

実例 2 実数 x, y において、$x^2 = y$ のとき、$x \neq 0$ ならば $y \neq 0$

(ア) 表を用いた証明

まず, この問題を表に整理すると表 3 となる. 次に，導く性質を変形して表 4 となる．最後に，$x \neq 0$ を動かすと表 5 となる. この表 5 より, 次の証明が導かれる．

表 3

使える性質	導く性質
$x, y \in R$	$y \neq 0$
$x^2 = y$	
$x \neq 0$	

表 4

使える性質	導く性質
$x, y \in R$	$\perp$
$x^2 = y$	
$x \neq 0$	
$y = 0$	

証明：実数 x, y において $[x^2 = y$ かつ $y = 0$ ならば, $x = 0]$ を示せばよい. $x^2 = y = 0$ より $x = 0$ が成り立つ．

(イ) シークエント方式での証明

まず，与えられた命題をシークエントで表現する．そして，推論規則を積み上げていくと，図 3 を得る．図 3 における推論規則 (i) は「$x^2 = 0$ の導入」を意味する．

表 5

使える性質	導く性質
$x, y \in R$	$x = 0$
$x^2 = y$	
$y = 0$	

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\{y=0, x^2=y\} \to x^2=0 \qquad \{x^2=0\} \to^{(4)} x=0}{\{x \in R, y \in R, x^2=y, y=0\} \to^{(3)} x=0}\ (cut)(i)}{\{x \in R, y \in R, x^2=y, x \neq 0, y=0\} \to^{(2)} \perp}\ (\neg 左)}{\{x \in R, y \in R, x^2=y, x \neq 0\} \to^{(1)} y \neq 0}\ (\neg 右)$$

図 3

(ウ) 比較

(ア) と (イ) を比較するため，図 3 における 4 つのシークエント (1), (2), (3), (4) を (ア) の表で表わすと，それぞれ表 3, 表 4, 表 5, 表 6 となる．

表 6

使える性質	導く性質
$x^2 = 0$	$x = 0$

ここから，次のことが確認できた．

(ア) において, (イ) での証明における (cut) の変形が表に現れていない.しかし, さほど重要でない部分の変形であるため, 今回の命題においては, (ア) と (イ) はほとんど同じと言える．

4 おわりに

本研究では,『使える性質ー導く性質』の表とシークエントを比較することで, 実際の証明とシークエント方式での証明の関係について考察した. その結果, 実際の証明の特徴とシークエントの方式での証明が持つ特徴が分かった.

具体的には, 実際の証明に表を用いるという手法は、証明を新しく学ぶ者に理解しやすいが, どの文からどの文を導いたかを表現しにくい．一方、シークエント方式は, 証明を新しく学ぶ者にとって理解しにくいが, どの文からどの文をを導いたかを表現しやすいので，実際に証明を導く際に親切である．

今後機会があれば, より多くの命題を扱い, 双方の特徴を深く理解したい.

5 参考文献

[1] Daniel J. Velleman,“ How to Prove It:A Structured Approach ”, Cambridge University Press, New York，2006

[2] 松井 知己:『誰でも証明がかける』，日本評論社，東京，2010.

[3] 佐々木克巳:『南山大学情報理工学部「数理論理学」講義内資料』，2009