

論理パズルと真理値表

2007MI126 松宮加奈子

指導教員：佐々木克巳

1 はじめに

数理論理学を研究していくなかで、真理値表を用いて論理パズルを解くことはできないのか、そして、真理値表を用いれば、簡潔に解けるのではないか、という点に注目した。本研究では、真理値表を用いた論理パズル解法を研究する。

具体的には、スマリヤン [1] で取り上げられている論理パズルについて、「美女が野獣か？」(12問)を、[1]で紹介されている解き方ではなく、真理値表を用いて解いた。本稿では、12問の中から、3問(「初日の試み 1回目」、「4回目」、「論理迷路」)を抽出し、その真理値表による解法を示す。

2 初日の試み 1回目

以下に [1] で紹介されている「初日の試み 1回目」を示す。

2部屋 (I, II) がある。2部屋のそれぞれに貴婦人が虎のどちらかがいる。しかし、2部屋とも虎がいることも、または貴婦人がいることも、また一方が貴婦人で、他方が虎であるかもしれない。さらに、各部屋には部屋の番号と同じ数字が書いてある次の注意書きが貼ってある。

I: この部屋に貴婦人あり、そして他部屋に虎あり

II: 2部屋の一つに貴婦人あり、そして2部屋の一つに虎あり

2つの注意書きは1つは本当で、1つは嘘である。どの部屋に貴婦人がいるかが問題である。

真理値表を用いた解答

まず、全部で4通りの可能性があることが分かる。

- ・両部屋とも貴婦人がいる
- ・両部屋とも虎がいる
- ・部屋 I が貴婦人で、部屋 II に虎がいる
- ・部屋 II が虎で、部屋 I に貴婦人がいる

ここで、「部屋 I に貴婦人がいる」という文を作ると、真理値が F(偽) のときは、虎がいるということになる。「部屋 II に貴婦人がいる」でも同じことが言える。2つの文「部屋 I に貴婦人がいる」、「部屋 II に貴婦人がいる」の T(真), F を組み合わせると、上の4通りを簡単に表すことができる。この2つの文と、I と II の注意書きに対して真理値表を作成すると、表 1 になる。後で行を参照するために、各行の左側に番号を振っておく。

表 1

	部屋 I に貴	部屋 II に貴	注 I	注 II
(1)	T	T	F	F
(2)	T	F	T	T
(3)	F	T	F	T
(4)	F	F	F	F

ここで、一つは本当で、1つはうそであるという条件より、

- ・I の内容が嘘 (F) で、II の内容が本当 (T)
- ・II の内容が嘘 (F) で、I の内容が本当 (T)

の2通りが考えられる。表 1 より、(3) 行目のみが、この2通りに当てはまる。表 1 の (3) 行目は、「部屋 I に貴婦人がいる」が F で、「部屋 II に貴婦人がいる」が T となっているので、部屋 I に虎がいて、部屋 II に貴婦人がいるということになる。

3 4回目

以下に [1] で紹介されている「4回目」を示す。

今回も2部屋 (I, II) がある。しかし、左側の部屋 (部屋 I) に貴婦人がいれば、ドアの注意書きは本当であり、虎がいれば、注意書きは嘘である。右側の部屋 (部屋 II) では状況が反対である。2節と同様に、両部屋とも貴婦人がいるか、虎がいるかはあり得ることだし、1部屋に貴婦人がいて、他部屋に虎がいることもある。貴婦人はどちらの部屋にいるのだろうか。注意書きは以下の2つである。

I: 両方とも貴婦人あり

II: 両方とも貴婦人あり

真理値表を用いた解答

2節と同様にして真理値表を作成すると、表 2 になる。

表 2

	部屋 I に貴	部屋 II に貴	注 I	注 II
(1)	T	T	T	T
(2)	T	F	F	F
(3)	F	T	F	F
(4)	F	F	F	F

ここで、「部屋 I に貴婦人がいれば、ドアの注意書きは本当で、虎がいれば嘘であり、部屋 II では状況が逆となる。」という条件を考える。

要するに、「部屋 I に貴婦人がいる」と (I の内容) の真理値が同じであり、「部屋 II に貴婦人がいる」と (II の内容) の真理値が異なる行を探せばよい。ここで

「部屋 I に貴婦人がいる」と (I の内容) が同じ真理値となる個所を

「部屋 II に貴婦人がいる」と (II の内容) が異なる真理値となる個所を

と示すと (3) 行目のみが条件に当てはまることが分かる。よって、今までと同様に、真理値表より部屋 I に虎がいて、部屋 II に貴婦人がいることがわかる。

4 論理迷路

以下に [1] で紹介されている「論理迷路」を示す。

この問題では、I~IX の9部屋がある。また、1部屋だ

けに貴婦人，他の8部屋にはそれぞれ虎がいるか，空っぽである．さらに，貴婦人の部屋のドアの注意書きは本当であり，虎のいる部屋すべてのドアの注意書きは嘘であり，空部屋のドアの注意書きは本当か嘘かのどちらかである．

- I：奇数番の部屋に貴婦人あり
- II：ここは空部屋なり
- III：Vの注意書きは正しいか，VIIの注意書きは間違っているかのどちらかだ
- IV：注意書きIは間違いだ
- V：注意書きがIIか，注意書きIVはどちらかが本当だ
- VI：注意書きIIIは間違いだ
- VII：部屋Iには貴婦人いず
- VIII：この部屋に虎あり，部屋IXは空部屋なり
- IX：この部屋に虎あり，注意書きVIは間違いだ

ここで，部屋VIIIは空っぽか，そうでないかのどちらかを伝えたとこ，貴婦人がどの部屋にいるかを定めることができた(条件*)．
貴婦人はどの部屋にいるか？

真理値表を用いた解答

まず，一部屋だけに貴婦人，他の8部屋は，虎がいるか，空部屋であるかどちらかであるという条件から，9通りの可能性がある．この9行の真理値表を作成する．ここで，“部屋Iに貴婦人がいて，他の部屋は虎か空部屋である”という文を“I貴”と省略して書き，“注意書きI”も“I”と省略して，他の文も同様に省略する．分からない箇所は埋めずに，真理値表を作成すると表3になる．

表3

		I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX
(1)	I 貴	T		T	F		F	F		
(2)	II 貴	T	F	T	T	T	F	T		
(3)	III 貴	T			F			T		
(4)	IV 貴	F		T	T	T	F	T		
(5)	V 貴	T			F			T		
(6)	VI 貴	F		T	T	T	F	T		
(7)	VII 貴	T			F			T		
(8)	VIII 貴	F		T	T	T	F	T	F	
(9)	IX 貴	T			F			T		F

ここで，“貴婦人がいる部屋のドアの注意書きは本当である”という条件は，(2)行II列がFであることに反する．よって“II貴”はFであり，IIに貴婦人はいない．すなわち，部屋IIは虎か空部屋である．(6)，(8)，(9)も同様である．よって，部屋II，VI，VIII，IXは虎がいるか，空部屋かのどちらかであることが分かった．

さらに，(条件*)を考える．この条件を用いるために，部屋VIII，部屋IXとVIIIの注意書きを対象とした真理値表を作成する．VIIIとIXの部屋は既に空部屋か虎がいるかのどちらかであるので，その組み合わせは4通りある．したがって，以下の表4の真理値表となる．

ここで，(条件*)を用いる．VIIIの部屋が空部屋の場合，表4を用いて，答えの判断がつかないことが分かる．

したがって，VIIIの部屋が空部屋ではない．よって，(10)行目，(11)行目に絞ることができる．ここで，虎がいる部屋の注意書きは嘘であるので，VIIIの注意書きはFでなければならない．この条件を満たすのは，(10)行目だけなので，VIIIおよびIXの部屋に虎がいることが分かる．IXの部屋は虎なので，注意書きIXは嘘となり，IXの注意書きはFとなることも分かる．

表4

	部屋 VIII	部屋 IX	注 VIII
(10)	虎	虎	F
(11)	虎	空	T
(12)	空	虎	F
(13)	空	空	F

次に，最初の真理値表の内容をみると，埋められていない箇所が存在する，しかし，部屋IIに虎がいるか，空部屋の判断がつけば表を埋められる．そこで，(II，VI，VIII，IXは貴婦人が不在と分かっている)，(2)，(6)，(8)，(9)行目は対象から外し，(1)，(3)，(4)，(5)，(7)の5つの各場合を，部屋IIに虎がいる場合と空部屋の場合に分けて，真理値表を作成する．空部屋は“空”として，真理値表を作成すると，以下の表5になる．

表5

	部 II	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX
I 貴	虎	T	F	T	F	F	F	F	F	T
I 貴	空	T	T	T	F	T	F	F	F	T
III 貴	虎	T	F	F	F	F	T	T	F	F
III 貴	空	T	T	T	F	T	F	T	F	T
IV 貴	虎	F	F	T	T	T	F	T	F	T
IV 貴	空	F	T	T	T	T	F	T	F	T
V 貴	虎	T	F	F	F	F	T	T	F	F
V 貴	空	T	T	T	F	T	F	T	F	T
VII 貴	虎	T	F	F	F	F	T	T	F	F
VII 貴	空	T	T	F	F	T	F	T	F	T

ここで，今まで通りに貴婦人がいる部屋の注意書きは本当なので，8行に絞りこめる．さらに，IXの注意書きは，Fであることはもう分かっていることなので，この条件に当てはまる箇所を探すと，9行目の，部屋VIIに貴婦人がいて部屋IIに虎がいる場合のみである．

よって，真理値表より部屋VIIに貴婦人がいることが分かる．

5 おわりに

本研究により「美女が野獣か？」という問題はすべて真理値表を使って解くことができた．[1]に記載されている真理値表を使わない解き方でも解くことはできるが，真理値表を用いて簡潔に解くこともできた．

参考文献

- [1] レイモンド・スマリヤン(阿部剛久 訳):『数学パズル 美女が野獣か?』. 森北出版株式会社, 東京, 1996.