区間係数多項式の零点の存在範囲

2007MI115 窪田真之
指導教員：杉浦洋

1　はじめに

多くの応用分野で現れる多項式はその係数が測定誤差や計算誤差による摂動を受けているので，摂動を受けた係数を区間で表現した区間多項式を考えることは自然である．

この論文では，特に区間多項式の零点について研究する．n 次区間多項式の実零点の集合が高々n 個の区間（零区間）となることを示す．また，複素零点集合の連結成分（零区画）が，重複度を込めて丁度 n 個の連結成分からなることを示す．

本論文では，これらの理論に従って，零区間と零区画を作図するプログラムを作成し，理論の有効性を検証する．

2　区間多項式と零点集合

n 次区間多項式は多項式の集合

$$
\begin{aligned}
[f](x) :&= \sum_{i=0}^{n}[a_i, b_i]x^i \\
&= \left\{ \sum_{i=0}^{n} f_i x^i : f_i \in [a_i, b_i], i = 0, \cdots, n \right\}
\end{aligned} \quad (1)
$$

で，区間係数 $[a_i, b_i], i = 0, \cdots, n$ は有界閉区間である．
$[a_n, b_n]$ は $[f](x)$ の最高次区間係数である．
$[f](x)$ の上限関数 $\mathcal{U}f(x)$，下限関数 $\mathcal{L}f(x)$ を

$$
\mathcal{U}f = \begin{cases}
\mathcal{U}f^+(x) = \sum_{i=0}^{n} b_i x_i & (x \geq 0) \\
\mathcal{U}f^-(x) = \sum_{0 \leq 2i \leq n} b_{2i} x^{2i} & \\
\quad + \sum_{0 \leq 2i+1 \leq n} a_{2i+1} x^{2i+1} & (x < 0)
\end{cases} \quad (2)
$$

$$
\mathcal{L}f = \begin{cases}
\mathcal{L}f^+(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x_i & (x \geq 0) \\
\mathcal{L}f^-(x) = \sum_{0 \leq 2i \leq n} a_{2i} x^{2i} & \\
\quad + \sum_{0 \leq 2i+1 \leq n} b_{2i+1} x^{2i+1} & (x < 0)
\end{cases} \quad (3)
$$

とする．$x_0 \in \mathbb{R}$ のとき区間 $[f](x_0) = [\mathcal{L}f(x_0), \mathcal{U}f(x_0)]$ となることは明らかである．
区間多項式 $[f](x)$ の零点集合を

$$
Z([f]; \mathrm{K}) := \{x \in \mathrm{K} :\leq f(x) \in [f](x) s.t. f(x_0) = 0\} \quad (4)
$$

と定義する．
$[f](x)$ の零点集合は，いくつかの互いに交わらない閉区間によって構成される．我々は，それらの区間を区間多項式の“ 零区間 ”と呼ぶ．零区間の端点（$\pm\infty$ をのぞく）は上限・下限関数 $\mathcal{U}f(x)$ または $\mathcal{L}f(x)$ の零点である．

3　零区間

この節では，与えられた区間多項式の零区間の個数について考察をする．
我々は，まず記述に便利なように退化区間，無限区間の概念を導入する．
［注意１］$[a, a]$ を $[f](x)$ の零区間とするならば，そのとき $x = a$ の $\mathcal{U}f(x)$ と $\mathcal{L}f(x)$ の零点としての位数の和は少なくとも 2 になる．　そこで，われわれは a を $[a, a]$ の“ 重複の端点 ”とみなす．そうすることにより，全ての零区間は 2 個の端点を持つ．
$x = 0$ における $\mathcal{U}f(x)/\mathcal{L}f(x)$ の重複度は $x = 0$ における $\mathcal{U}f^+(x)$ と $\mathcal{U}f^-(x)/(\mathcal{L}f^+(x)$ と $\mathcal{L}f^-(x))$ の最小重複度で定義する．//
［注意２］もし，$(-\infty, a]$ が $[f](x)$ の零区間ならば，$[f](x)$ の主係数の区間係数が 0 を含み，$[b, \infty)$ の形の零区間をも持つ．この場合，$(-\infty, a] \cup [b, +\infty)$ を１つの零区間と数える．言い換えると，もし主係数の区間係数が 0 を含まないとすると、その時 $[f](x)$ は無限零区間を持たない．//
区間零点の端点は上限関数か下限関数の零点であるから，上限関数と下限関数の零点の個数により，区間零点の個数を知ることが出来る．
［定義３］零を含まない数列 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ の符号交代数は $\{a_i a_{i+1} | 1 < i < n-1\}$ における負数の数である．零を含む数列の符号交代数は，元の数列から全ての零を除いた数列の符号交代数である．//
［定理４］多項式 $f(x)$ の正の零点の重複を込めた個数は，係数列の符号交代数を超えない．//
［補題５］n 次区間多項式 $[f](x)$ について，$\mathcal{L}f^+(x)$,$\mathcal{L}f^-(-x)$,$\mathcal{U}f^+(x)$,$\mathcal{U}f^-(-x)$ の係数列の符号交代数の総和は $2n$ を超えない．//
［補題６］n 次区間多項式 $[f](x)$ の上限関数 $\mathcal{U}f(x)$ と下限関数 $\mathcal{L}f(x)$ の実零点の個数の和は $2n$ 以下である．//
［定理７］n 次区間多項式 $[f](x)$ の零区間の数は n 以下である．//

4　複素零領域

実数 x_0 が $[f](x)$ の零点集合に入るかどうかを決めるためには，零区間に入るかどうかを見ればよいので簡単である．一方，複素数 z が $[f](x)$ の零点であるかどうかを決めることは難しい．
$z = re^{i\theta}$ と仮定する．$[f](x) = \sum_{j=0}^{n}[a_j, b_j]x^j$ とし $f(x) = \sum_{j=0}^{n} f_j x^j \in [f](x)$ とする．そのとき，

$$
\mathrm{Re}(f(z)) = \sum_{j=0}^{n} r^j \cos(j\theta) f_j,\ f_j \in [a_j, b_j],
$$

$$
\mathrm{Im}(f(z)) = \sum_{j=0}^{n} r^j \sin(j\theta) f_j,\ f_j \in [a_j, b_j].
$$

となる．z が $[f](x)$ の零点であるとき，そのときに限って次の f_i を未知数とする制約条件付き線形方程式は解を持つ：

$$\left\{\begin{array}{l} \displaystyle\sum_{j=0}^{n} r^j \cos(j\theta) f_j = 0, \\ \displaystyle\sum_{j=0}^{n} r^j \sin(j\theta) f_j = 0, \end{array}\right. \quad a_j \le f_j \le b_j,\ j = 0, 1, \cdots, n.$$

また，z が $[f](z)$ の零点なら，任意の $0 \le m \le n$ に関して，

$$\begin{aligned} S_m(z) &= \sin(m\theta)\mathrm{Re}([f](z)) - \cos(m\theta)\mathrm{Im}([f](z)) \\ &= \sum_{j \ne m} r^j \sin((m-j)\theta)[a_j, b_j] \ni 0 \end{aligned} \tag{5}$$

［注意９］方程式 (5) 内で，$\sin\theta \ne 0$ を仮定する，つまり z は実数でない．$[f](x)$ の実数零点は前章の方法で計算される．そして，複素零領域を論ずるこの章では記述に便利なよう z は実数でないものだけ考える．//
区間多項式の複素零点集合はとても複雑となる．図２は，複素平面内の $z^2 + [-2, 2]z + [1/2, 2]$ の複素零点集合を示している．影の部分と実線の部分が零点集合を表す．

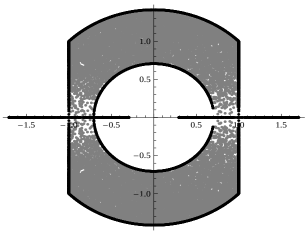

図１　$z^2 + [-2, 2]z + [1/2, 2]$ の零領域

２つの水平な線分は実軸上にある．つまり，それらは実零区間であり，図１にみられるものである．影の部分の境界は，代数曲線 $x + 1 = 0, x - 1 = 0, x^2 + y^2 - 1/2 = 0, x^2 + y^2 - 2 = 0$ である．このとき，$z = x + iy, x, y \in \mathbb{R}$. 複素零点集合は複素数平面のいくつかの連結成分によって作られる．それらは複素零領域と呼ばれる．我々は区間多項式の複素零領域の個数や境界を話題としていく．

4.1　複素零領域の数

ここでは，我々は，n 次区間多項式が重複度も含めて丁度 n 個の複素零領域を持っていることを示す．その証明は，一変数多項式の零点がその係数について連続であるという，次の定理による．
［定理１０］(Bhatia の定理) 区間 $t \in I$ で連続な実関数 $a_i(t)$ $(1 \leqslant j \leqslant n)$ を係数とする一変数多項式を $z^n + a_1(t)z^{n-1} + \cdots + a_n$ とする．これに対し，t の複素連続関数 α_k $(1 \leqslant k \leqslant n)$ が存在し，n 個の零点を構成する．//
以下に述べる補題は，直接この定理に従う．
［補題１１］もし，$[f](z)$ の最高次係数が 0 を含まず，Ω が $[f](z)$ の複素零領域であるとすると．すべての $f(z) \in [f](z)$ に関して，$f(z)$ は Ω 内に零点を持つ．//
［定理１２］$[f](z)$ は最高次係数の区間が 0 を含まない n 次の区間多項式である．このとき，$[f](z)$ は重複度を込めて n 個の複素零領域をもつ．//
例えば，区間多項式 $x^2 + [-2, 2]x + [1/2, 2]$ は丁度１の複素零領域を持ち,（図１参照）重複度は２である．

4.2　複素零領域の境界

この節では，我々は複素零領域の境界の完全な記述を与え，境界が多項式で表現できる曲線，すなわち代数曲線であることを証明する．
［定義１３］$[f](z) = \sum_{i=0}^{n}[a_i, b_i]z^i$ を仮定する．もし，$f(z) \in [f](z)$ で少なくとも n の $f(z)$ の係数が a_i または b_i $i = 0, 1, \cdots, n$ のどちらかであるとき，我々は $f(z)$ を $[f](z)$ の境界多項式と呼ぶ．//
［定理１４］$[f](z)$ の複素零領域の境界点は境界多項式の零点でなくてはならない．//

5　境界関数点描プログラムの観察

前章で述べた方法で零点領域を作図することは，非常に困難である．ここでは，もっと簡便な方法を提案し，それに基づき数値実験を行う．

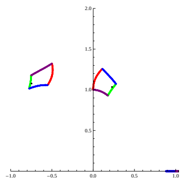

図２

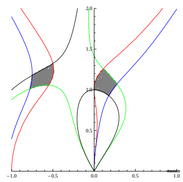

図３

図２が我々の，図３が文献中のプログラムによって書かれたものである．代数曲線による方法では代数曲線のどの部分が本当に零点領域の境界になるか不分明であったが，我々の方法では明瞭である．区間多項式の中に，区間係数が２つ含まれている場合と，３つ含まれている場合との２つの場合に分けてプログラムを制作し，図をそれぞれ観察した．

6　おわりに

今回の研究により，区間係数を含む区間多項式を明確に定義することができるようになった．また，複素平面において，区間多項式の複素零点が取りうる値を境界関数の零点から求め，複素零領域として限定した．Mathematica におけるプログラムは複素零領域の決定を保証する結果を生み，複素零領域や複素零点をグラフ化し観察を可能にした．今回の研究においては，区間係数が３つ含まれるものまでを対象にして実験を行ってきた．今後は，観察において曖昧であった区間係数が３つ含まれる場合の複素零領域の正当性と，４つ以上の区間係数が含まれる場合のプログラムの構成，複素零領域の正当性についての証明法とを研究していくことである．

参考文献

[1] X.Fan,J.Deng,and F.Chen:Zeros of univariate interval polynomials,J.Comp.Appl.Math.,216,pp.563-573(2008)