角の三等分の作図不可能性

2007MI114 小西未紗
指導教員：佐々木克巳

1　はじめに

古代ギリシアから有名な作図問題の一つに、定規とコンパスだけを使って任意に与えられた角を三等分にせよという問題がある．その答えは，長い年月をかけて「不可能」という結論に至った．それは「どうやってもできなかった」という意味ではなく，数学的に「不可能」が証明されたのだった．

本研究では，瀬山 [1] と矢野 [2] に沿って，省略されている証明を補うこと，および，証明の概観をまとめることを行いながら，角の三等分の作図不可能性を理解した．具体的には次の定理を理解した．

定理 1　60 度の角の三等分は，定規とコンパスだけでは作図不可能である．

本稿では，まず次節で定規とコンパスだけで作図可能であることをきちんと述べる．3 節で定理 1 の証明の概観を示す．4 節で 3 節で述べた定理の一部を証明する．

2　作図問題

ここでは，定規とコンパスだけで作図可能であることをきちんと述べる．以下に，ユークリッドの『幾何学原本』にのっている作図の公準を示す．

公準 I 一点とこれと異なる他の一点とを結ぶ線分を作ること．

公準 II 与えられた線分を，その両側へいかほどでも延長すること．

公準 III 任意の一点を中心として，他の任意の一点を通る円を描くこと．

公準 I，II，III より，次の公準 III′ が導かれる．

公準 III′ 任意の一点を中心として，任意の半径の円を描くこと．

定規とコンパスだけで作図可能であるとは，公準 I，II，III′ に示される作図ができると仮定して，与えられた条件を満足する図形を作図できる，ということである．以下では，この意味で作図可能であることを，単に作図可能であるという．

3　証明の概観

ここでは，定理 1 の証明の概観を示す．定理 1 は次の 4 つの定理から導かれる (図 1 参照).

定理 2　$x^3-3x-1=0$ が作図可能解をもたないならば，60 度の角の三等分は作図不可能である．

定理 3　$x^3-3x-1=0$ がもし有理数解をもたなければ，この方程式は作図可能解をもたない．

定理 4　$x^3-3x-1=0$ の解は整数でなければ無理数である．

定理 5　$x^3-3x-1=0$ は整数解をもたない．

60 度の角の三等分が作図不可能 (**定理 1**)
↑（**定理 2**）
$x^3-3x-1=0$ が作図可能解をもたない
↑（**定理 3**）←（**定理 3′**）
$x^3-3x-1=0$ が有理数解をもたない
↑（**定理 4**）←（**定理 4′**）
$x^3-3x-1=0$ が整数解をもたない（**定理 5**）

図 1　証明の概観

[2] では，定理 3 と定理 4 を，それぞれ一般化した定理，すなわち次の定理 3′，定理 4′ を示している．

定理 3′　有理数を係数にもつ三次方程式

$$x^3+ax^2+bx+c=0 \tag{1}$$

がもし有理数解をもたなければ，この方程式は作図可能解をもたない．

定理 4′ 整数を係数とする方程式

$$x^n+a_{n-1}x^{n-1}+a_{n-2}x^{n-2}+\cdots+a_1x+a_0=0$$

の解は整数でなければ無理数である．

さらに，定理 3′ の証明には次の定理 6 を用いている．ただしその後半，すなわち，現れる変数の値が作図可能である代数式の値は，せいぜい加減乗法および開平を含む式に限るということのみを用いている．

定理 6　現れる変数の値が作図可能である代数式の値は，それがせいぜい四則および開平を含むとき，およびそのときに限り作図可能である．

なお，[2] では定理 6 を第一基本定理，定理 3′ を第二基本定理と呼んでいる．

4　定理の証明

ここでは，前節で述べた定理 2，定理 3′，定理 4′，定理 5 を証明する．

定理 2 の証明　まず，20° が作図可能であるときに，図 2 における x が作図可能であることを示す．直線上に点 O

と点 B をとり，それぞれの点で，$20°$，$60°$ で交わるような 2 点線（図 2 参照）の交点を A とする．以下図 2 にあるように C，P，Q，R の順で点をとることができる (P をとるときに x が作図可能と分かる)．

次に x が満たす方程式を求める．

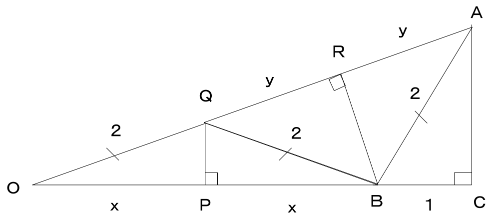

図 2 $\angle ABC = 60°$, $\angle AOC = 20°$

図 2 で，$\triangle OPQ \backsim \triangle ORB \backsim \triangle OCA$ より

$$\frac{OP}{OQ} = \frac{OR}{OB} = \frac{OC}{OA}$$

よって

$$\frac{x}{2} = \frac{y+2}{2x} = \frac{2x+1}{2y+2}$$

となり，この式から y を消去すれば，

$$x^3 - 3x - 1 = 0$$

が得られる．

定理 3′ の証明 （この証明は，[2] で紹介されている証明から，定理 6 を用いている部分を抽出し，定理 6 をどこで用いているかを明記したものである.）

(1) の (a, b, c) を $(0, 3p, 2q)$(p と q は有理数) として証明する (理由は省略する)．すなわち，(1) は有理数係数である三次方程式

$$x^3 + 3px + 2q = 0$$

となる．この解は，まず Q に平方根 $\sqrt{q^2 + p^3}$ を添加した拡大体 K を作り，次に立方根を添加した体 K^* に含まれる．もし $\sqrt{q^2 + p^3}$ が有理数ならば，$K = Q$ となる．この解が作図可能なためには，立方根は平行根では表されないので，定理 6 より，立方根の添加は実際に起こってはならない．よって，この立方根は初めから K に含まれていなければならない．もし $K = Q$ ならば，この方程式の三つの解は有理数である．また K が Q の真の拡大体であっても，平方根を添加した体であれば，その要素は二個の有理数で表される．それを有理化すれば，解のどれかは有理数係数の二次式を 0 とし，その二次式はもとの方程式を整除し，その商は有理数係数の一次式である．つまり一つの解が有理数，他の二解は有理数を係数とする二次式の解となる．

なお，定理 3′ の (1) 式において，$a = 0, b = -3, c = -1$ とすれば，定理 3 が導かれる．

定理 4′ の証明 整数を係数とする方程式

$$x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \cdots + \cdots a_1x + a_0 = 0 \qquad (2)$$

の解を，有理数 p/q(p, q:整数，$q \neq 0$) と仮定する．ただし，この分数は既約分数とする．これを x に代入し整理して，q でくくると，

$$p^n = -q(a_{n-1}p^{n-1} + \cdots + a_1pq^{n-2} + a_0q^{n-1})$$

となり, q は p^n の約数であることが分かる．そこで $p^n/q = k$(k:整数）と仮定する．$p^n = qk$ で，p と q は互いに素であるから，$q = 1$ となり，p/q は整数となる．

よって，整数を係数とする方程式の解は，整数でなければ無理数となる．

なお，(2) 式において，$n = 3, a_0 = -1, a_1 = -3, a_2 = 0$ とすれば，定理 4 が導かれる．

定理 5 の証明 $y = x^3 - 3x - 1$ とおく．$y' = 0$ を満たす x を求めることにより，このグラフは $x = \pm 1$ のとき極値をとる．$x = 1$ のとき極小値 -3，$x = -1$ のとき極大値 1 をとる．グラフは以下のようになる (図 3).

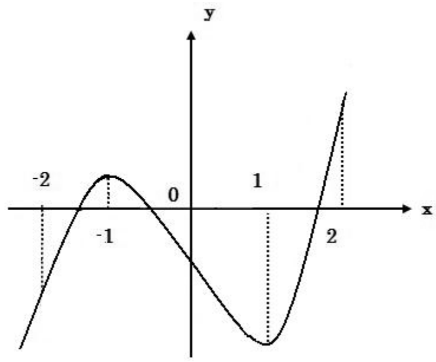

図 3 関数 $y = x^3 - 3x - 1$ のグラフ

グラフより，x 軸との交点を調べると整数値で交わっていないことが分かる．よって $x^3 - 3x - 1 = 0$ は整数解をもたない．

5 おわりに

今回，角の三等分の証明を一通り行い，その奥深さや難しさに気付いた．第一・第二基本定理の証明はこの作図問題の核となるものであり，もっと深く研究できればよいと思った．角の三等分に限らず，不可能であることを証明するには，数学におけるすべての知識が必要であると感じた．

参考文献

[1] 瀬山士郎：『不可能を証明する：現代数学の挑戦』．青土社，東京，2010.

[2] 矢野健太郎（一松信 解説）:『角の三等分』．ちくま学芸文庫，東京，2006.