小標本におけるブートストラップ信頼区間の研究

2007MI113 近藤佑亮

指導教員：松田眞一

1 はじめに

観測されたデータの中に含まれる母集団の情報を利用して統計的誤差の評価をしたい。通常、このような問題に対しては母集団の分布を正規分布等で近似して、統計的推測、誤差の評価を理論的にする。これに対して、複雑な数式や理論に基づく解析を、計算機を用いた大量の反復計算で置き換えた数値計算法が提案された。これがEfron[1] によって提案されたブートストラップ法と呼ばれる統計的手法である。

本研究の目的は小標本のデータに対して、ブートストラップ法による信頼区間の比較・考察をシミュレーションを通して行うことである。ブートストラップ法についてはEfron[1]、Efron・Tibshirani[2]、汪ら [4] を、ブートストラップ信頼区間については下平 [3]、汪・田栗 [5] を参考にしている。

2 ブートストラップ信頼区間

信頼区間を構成するための 3 種類のブートストラップ法について述べる。最も簡単な構成法はパーセンタイル法である。これはブートストラップ分布から直接信頼区間を得る方法である。

2 つ目の方法は BCa 法である。パーセンタイル法では推定量の偏りや分布の歪みの影響を直接受けてしまう。これを改良するため BCa 法では、推定量の偏りと歪みを同時に補正する。BCa 法による信頼区間は、被覆確率の観点からパーセンタイル法より優れた性質をもっている。しかし偏りの推定は通常ブートストラップ標本に基づいて行うため、ブートストラップ反復回数をかなり大きくとらないと、偏りに対する信頼できる推定量が作れないという欠点がある。

3 つ目の方法はブートストラップ t 法である。この方法では分散の推定値が必要となるが、この分散の推定量が信頼できるものであるならば良い方法である。ブートストラップ反復ごとに分散の推定量が必要なため計算時間がかかることが欠点である。

2.1 パーセンタイル法

1. 標本 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ から復元抽出により、リサンプル $x_1^*, x_2^*, \cdots, x_n^*$ を抽出する。
2. ブートストラップ推定量 $\hat{\theta}^* = \hat{\theta}(x_1^*, x_2^*, \cdots, x_n^*)$ の値を計算する。これを B 回繰り返し、$\hat{\theta}_1^*, \hat{\theta}_2^*, \cdots, \hat{\theta}_B^*$ を求める。
3. 信頼水準 $1-2\alpha$ の両側信頼区間は次式で与えられる。

$$(\hat{\theta}_{(\alpha)}, \hat{\theta}_{(1-\alpha)}) = (\hat{\theta}^*_{(\alpha)}, \hat{\theta}^*_{(1-\alpha)})$$

2.2 BCa 法

1. 標本 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ から復元抽出により、リサンプル $x_1^*, x_2^*, \cdots, x_n^*$ を抽出する。
2. ブートストラップ推定量 $\hat{\theta}^* = \hat{\theta}(x_1^*, x_2^*, \cdots, x_n^*)$ の値を計算する。これを B 回繰り返し、$\hat{\theta}_1^*, \hat{\theta}_2^*, \cdots, \hat{\theta}_B^*$ を求める。
3. 事象が成立した回数を $\sharp\{\cdot\}$ と書いて、

$$\hat{\alpha}_0 = \frac{1}{B}\sharp\{\hat{\theta}_b^* \le \hat{\theta}, b = 1, \ldots, B\}$$

   および $\hat{z}_0 = z_{(\hat{\alpha}_0)}$ を計算する。$z_{(\alpha)}$ は標準正規分布の $100\alpha\%$ 点である。
4. 標本から要素 x_i を取り除いて計算した $\hat{\theta}$ を $\hat{\theta}_{(i)}$ と書いて、加速定数の推定量を次式で計算する。

$$\hat{a} = -\frac{\sum_{i=1}^{n}(\hat{\theta}_{(i)} - \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\hat{\theta}_{(j)})^3}{6\left\{\sum_{i=1}^{n}(\hat{\theta}_{(i)} - \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\hat{\theta}_{(j)})^2\right\}}$$

5. $X \sim N(0,1)$ の累積分布関数を $\Phi(x)$ と書く (つまり $\Phi(z_{(p)}) = p$ である)。任意の $\alpha(0 < \alpha < 1)$ に対して、$\hat{\alpha}$ は次により求められる。

$$\hat{\alpha} = \Phi\left\{\hat{z}_0 + \frac{\hat{z}_0 + z_{(\alpha)}}{1 - \hat{a}(\hat{z}_0 + z_{(\alpha)})}\right\} \tag{1}$$

   信頼水準 $1-2\alpha$ の両側信頼区間は

$$[\theta^*_{(\hat{\alpha})}, \theta^*_{(\widehat{1-\alpha})}]$$

   で与えられる。ここで $\widehat{1-\alpha}$ は、式 (1) の $z_{(\alpha)}$ を $z_{(1-\alpha)}$ で置き換えたものである。

2.3 ブートストラップ t 法

1. 標本 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ から復元抽出により、リサンプル $x_1^*, x_2^*, \cdots, x_n^*$ を抽出する。
2. 手順 (1) で得られたリサンプルを用いて、$\hat{\theta}$ および $\hat{\sigma}$ に対するブートストラップ推定値 $\hat{\theta}^*$ および $\hat{\sigma}^*$ を計算する。
3. ブートストラップ t 値

$$T^* = \frac{\sqrt{n}(\hat{\theta}^* - \hat{\theta})}{\hat{\sigma}^*}$$

   を計算する。これを B 回繰り返し、$T_1^*, T_2^*, \cdots, T_B^*$ を求める。
4. $w_\alpha = T_\alpha^*$ とする。ここで T_α^* は T^* のブートストラップ分布の $100 \cdot \alpha\%$ 点である。$1-2\alpha$ の両側信頼区間が次式で与えられる。

$$[\hat{\theta} - n^{-1/2}\hat{\sigma}w_{1-\alpha}, \hat{\theta} - n^{-1/2}\hat{\sigma}w_\alpha]$$

3 シミュレーション

シミュレーションのデータとして正規分布、t 分布、ロジスティック分布、ラプラス分布、ガンマ分布、ワイブル

分布に従う標本を発生させる。標本数は 10、20、40、80、160 の 5 種とする。正規理論、パーセンタイル法、BCa 法、ブートストラップ t 法 (以下 t 法) の 4 種類の方法により 95% 信頼区間を作る。パーセンタイル法、BCa 法、t 法のブートストラップ反復回数は 5000 回とし、t 法での分散推定には反復 100 回のブートストラップ分散推定を用いている。シミュレーションによる各々の信頼区間の精度を測るため被覆確率を用いる。各々の信頼区間を 1000 回作成し母数が信頼区間に含まれる割合を調べる。この割合が 0.95 に近いことが望ましい。シミュレーションにおいて正規理論は母平均の信頼区間では $1-\alpha$ 信頼区間

$$\left[\overline{X} - t_{n-1}(\alpha)\frac{U}{\sqrt{n}}, \overline{X} + t_{n-1}(\alpha)\frac{U}{\sqrt{n}}\right]$$

を用いて、母分散の信頼区間では $1-\alpha$ 信頼区間

$$\left[\frac{(n-1)U^2}{\chi^2_{n-1}(\alpha/2)}, \frac{(n-1)U^2}{\chi^2_{n-1}(1-\alpha/2)}\right]$$

を用いている。

3.1 母平均の信頼区間

正規分布、t 分布、ロジスティック分布、ラプラス分布、ガンマ分布に従う標本のシミュレーションでは正規理論、t 法が標本数が 10 のときでも被覆確率が 0.95 に近かった。パーセンタイル法と BCa 法については標本数が 40 以下の場合他の 2 つの方法と比べて被覆確率が悪い。一方ワイブル分布に従う標本では正規理論、パーセンタイル法、BCa 法の被覆確率が同程度になり、t 法が一番被覆確率が高くなっている。標本数が大きくなると各手法の差が小さくなっている。

表 1 信頼区間が母平均を含んだ割合：ガンマ分布に従う標本

標本数	10	20	40	80	160
正規理論	.922	.945	.936	.955	.950
パーセンタイル法	.879	.932	.928	.950	.946
BCa 法	.880	.932	.931	.948	.945
t 法	.935	.952	.947	.951	.951

表 2 信頼区間が母平均を含んだ割合：ワイブル分布に従う標本

標本数	10	20	40	80	160
正規理論	.748	.801	.848	.899	.910
パーセンタイル法	.731	.801	.856	.903	.918
BCa 法	.740	.811	.870	.905	.923
t 法	.888	.911	.919	.946	.941

3.2 母分散の信頼区間

正規分布以外のシミュレーションで正規理論は標本数 10 から 160 と大きくなるになるにつれて被覆確率が下がることが確認された。すべての分布において t 法が最も被覆確率が優れていた。3 種のブートストラップ法は標本数が大きくなるにつれて精度が高くなっていった。

表 3 信頼区間が母分散を含んだ割合：ガンマ分布に従う標本

	10	20	40	80	160
正規理論	.843	.840	.815	.805	.804
パーセンタイル法	.668	.766	.812	.868	.910
BCa 法	.709	.802	.844	.888	.915
t 法	.901	.916	.919	.923	.933

表 4 信頼区間が母分散を含んだ割合：ワイブル分布に従う標本

標本数	10	20	40	80	160
正規理論	.373	.323	.331	.309	.270
パーセンタイル法	.335	.444	.568	.662	.721
BCa 法	.347	.472	.607	.690	.739
t 法	.789	.791	.824	.848	.865

4 まとめ

母平均の信頼区間については正規理論が大変良い結果を示しており、ブートストラップ法の優位性はワイブル分布での t 法でのみ示された。母分散の信頼区間では t 法はパーセンタイル法、BCa 法と比べて標本数が小さな時も被覆確率が優れていた。

5 おわりに

本研究を通して、母平均の信頼区間については正規理論が様々な分布の場合でも精度の高い信頼区間を構成することが分かった。母分散の信頼区間では t 法が非常に優れた結果を示し、ブートストラップ法の有効性が分かった。しかし、BCa 法については標本数が小さなとき正規理論にも負けており計算時間以外では t 法に対して優位性は分からなかった。

参考文献

[1] B. Efron: Bootstrap methods: another look at the jackknife. *Annals of Statistics*, 7, pp. 1–26, 1979.

[2] B. Efron, Robert J. Tibshirani: An introduction to the Bootstrap. *Monographs on Statistics and Applied Probability 57* , 1993.

[3] 下平英寿：ブートストラップ,『21 世紀の統計科学 III–数理・計算の統計科学』. 東京大学出版会, pp. 209–238, 2008.

[4] 汪金芳, 大内俊二, 景平, 田栗正章：ブートストラップ法–最近までの発展と今後の展望. 行動計量学, 19, pp. 50–81, 1992.

[5] 汪金芳, 田栗正章：ブートストラップ法入門,『統計科学のフロンティア 11–計算統計 I』. 岩波書店, pp. 3–63, 2003.