実証明における cut の役割

2007MI110 古久根全孝
指導教員：佐々木克巳

1　はじめに

本研究の目的は，実際の証明 (以下，単に実証明と呼ぶ) とシークエント体系 SNK にもとづく証明とを比較することで，それぞれの証明のしくみの理解を深めることである．具体的には，実証明の与えられたいくつかの命題に，SNK にもとづく証明を与えることで，実証明において用いられる cut の役割をいくつか抽出した．

本稿では，シークエント体系 SNK の概観を述べたうえで，cut の役割を列挙する．さらに，本研究で与えた SNK にもとづく証明から 6 つを抽出して列挙する．

2　シークエント体系ＳＮＫの導入

シークエント体系 SNK(以下，単に SNK と呼ぶ) は，シークエントを基本的な表現として構成された形式体系である．以下では，佐々木 [2] を参考にして，そのおおまかな定義と約束を示す．さらに,「SNK にもとづく証明」の意味を述べる．

シークエントとは，表現 $\{A_1, \cdots, A_n\} \to B$ のことである．ここで，各 A_n と B は述語論理の論理式で，論理記号 $\wedge$(かつ), $\vee$(または), $\supset$ (ならば), $\neg$(否定), $\bot$(矛盾) と限定記号 $\forall$(すべて), $\exists$ (存在) を用いて，ふつうの方法で定義されたものである．このシークエントの直感的な意味は「$A_1, \cdots, A_n$から B が導かれる」である．また，論理式の有限集合を表す記号として Γ, Δ などを用い，シークエントを表す記号として S, S_1 などを用いる．さらに，$x+1, x^2$ などの式を表す記号として s, t などを用いる．x を含む論理式を $P(x)$ と表すこともある．

SNK は，シークエントの変化によって，証明の過程を表現しようとする体系である．証明の過程は，証明すべきシークエントから出発し，SNK 推論規則を積み重ねて SNK 公理 $\{A\} \to A$ に到達した図式で表現される．この表現を SNK 証明図という．

SNK 推論規則は 17 種類あり，それぞれ

$$\frac{S_1}{S} \quad \text{または} \quad \frac{S_1 \qquad S_2}{S}$$

の形をしている．ここで，S_1(または S_1 と S_2) を，推論規則の上式，S を下式という．ここでは前者の形から (RAA), 後者の形から (cut) のみを示す．

$$\frac{\{\neg A\} \cup \Gamma \to \bot}{\Gamma \to A}\ (RAA)$$

$$\frac{\Gamma \to A \quad \{A\} \cup \Gamma \to B}{\Gamma \to B}(cut)$$

本研究における,「SNK にもとづく証明」とは，上記の SNK 証明図の論理式を実際の文におきかえて得られる形の証明である．ただし，$\Gamma \to x = x$ など実際の文において証明なしに正しいと判断されるシークエントは，SNK 公理と同様に図の一番上に現れてよいとする．本稿ではさらに,

・「n は奇数である」の否定は「n は偶数である」

を約束する．次の形は SNK 推論規則 (RAA) として許すことになる．ただし，Z は整数全体の集合である．

$$\frac{\{x \in Z, \exists k(x = 2k)\} \to \bot}{\{x \in Z\} \to \exists k(x = 2k+1)}(RAA)$$

3　cut の役割

ここでは，実証明において用いられる cut の形をその役割毎に示す．いずれの形も，cut の左の上式が，述語の性質などから，証明なしに正しいと判断される導出関係を表している．また，1 つ目も形は，(w 左) を省略している．

・cut の役割 1(等号の性質 置換)

$$\frac{\{s = t, P(s)\} \cup \Gamma \to P(t) \quad \{s = t, P(t)\} \cup \Gamma \to C}{\{s = t, P(s)\} \cup \Gamma \to C}(\text{置換})$$

(ただし，$P(s)$ は $P(x)$ の x の出現のいくつかを s で置き換えたものである．)

・cut の役割 2(等号の性質 反射律)

$$\frac{\Gamma \to s = s \quad \{s = s\} \cup \Gamma \to C}{\Gamma \to C}(\text{反射律})$$

・cut の役割 3(等号の性質 交換律)

$$\frac{\{s = t\} \cup \Gamma \to t = s \quad \{s = t, t = s\} \cup \Gamma \to C}{\{s = t\} \cup \Gamma \to C}(\text{交換律})$$

・cut の役割 4(等号の性質 推移律)

$$\frac{\{u = s, s = t\} \cup \Gamma \to u = t \quad \{u = s, s = t, u = t\} \cup \Gamma \to C}{\{u = s, s = t\} \cup \Gamma \to C}(Tr)$$

・cut の役割 5(その他の述語の性質)

$$\frac{\Gamma \to B \quad \{B\} \cup \Gamma \to C}{\Gamma \to C}(\text{述語の性質})$$

(ただし，$\Gamma \to B$ は，ここに現れる述語の性質から証明なしに正しいと判断される導出関係を表すものとする．)

・cut の役割 6(排中律)

$$\frac{\Gamma \to A \vee \neg A \quad \{A \vee \neg A\} \cup \Gamma \to C}{\Gamma \to C}(\text{排中律})$$

以下では，上記の cut における，左の上式を省略する．

さらに，上記の cut を組み合わせた形を示す．

・等号の性質 (推移律)

$$\cfrac{\cfrac{\{u = s, u = t\} \cup \Gamma \to C}{\{u = s, s = t, u = t\} \cup \Gamma \to C}\ (w\ 左)}{\{u = s, s = t\} \cup \Gamma \to C}\ (Tr)}{\{u = s\} \cup \Gamma \to C}\ (\text{述語の性質})$$

これを，

$$\frac{\{u=s, u=t\}\cup\Gamma\to C}{\{u=s\}\cup\Gamma\to C}\ (\text{推移律})$$

と略記する．

・等号の性質 (移項)

$$\cfrac{\cfrac{\{(1), x=z-y\}\cup\Gamma\to C}{\{(1)\}\cup\Gamma\to C}\ (\text{推移律})}{\cfrac{\{x+y=z, z-y=z-y\}\cup\Gamma\to C}{\{x+y=z\}\cup\Gamma\to C}\ (\text{反射律})}\ (\text{置換})$$

(ただし，(1) を $x+y=z, x+y-y=z-y$ としている．)

・等号の性質

$$\cfrac{\cfrac{\{s=t, u(s)=u(t)\}\cup\Gamma\to C}{\{s=t, u(s)=u(s)\}\cup\Gamma\to C}\ (\text{置換})}{\{s=t\}\cup\Gamma\to C}\ (\text{反射律})$$

(ただし，$u(s)$ は s の現れる式で，$u(t)$ は $u(s)$ の出現のいくつかを t で置き換えたものである．)

上の形に対しても，2 行目のシークエントを省略した形を用いる．

4 SNK にもとづく証明

ここでは，いくつかの，命題に対し，SNK にもとづく証明を行う．対象とした命題はチャートランド [1] から抽出した．

(命題 4.1)$x\in R$ とする．$x<0$ のとき $x^2+1>0$ である (ただし，R は実数全体の集合).

$$\cfrac{\cfrac{\{x\in R, x<0, x^2>0, (1)\}\to x^2+1>0}{\{x\in R, x<0, x^2>0\}\to x^2+1>0}\ (\text{述語の性質})}{\{x\in R, x<0\}\to x^2+1>0}\ (\text{述語の性質})$$

ただし，(1) を $x^2+1>x^2>0$ としている．

(命題 4.2)n が奇数のとき，$3n+7$ は偶数である．

$$\cfrac{\cfrac{\cfrac{\{n=2k+1, (1), (2)\}\to(2)}{\{n=2k+1, (1), (2)\}\to\exists l(3n+7=2l)}\ (\exists\text{右})}{\{n=2k+1, (1)\}\to\exists l(3n+7=2l)}\ (\text{推移律})}{\{n=2k+1\}\to\exists l(3n+7=2l)}\ (\text{等号の性質})}{\{\exists k(n=2k+1)\}\to\exists l(3n+7=2l)}\ (\exists\text{左})$$

ただし，(1) を $3n+7=3(2k+1)+7$，(2) を $3n+7=2(3k+5)$ としている．

(命題 4.3)$n\in Z$ のとき，n^2+3n+5 は奇数である．ただし，(1) を $\exists l(n^2+3n+5=2l+1)$，(2) を $\exists k(n=2k)\vee\exists k(n=2k+1)$，(3) を $n^2+3n+5=(2k)^2+3(2k)+5$，(4) を $n^2+3n+5=2(2k^2+3k+2)+1$ としている．

$$\cfrac{\cfrac{\cfrac{\cfrac{\{n\in Z, n=2k, (3), (4)\}\to(4)}{\{n\in Z, n=2k, (3), (4)\}\to(1)}\ (\exists\text{右})}{\{n\in Z, n=2k, (3)\}\to(1)}\ (\text{推移律})}{\{n\in Z, n=2k\}\to(1)}\ (\text{等号の性質})}{\{n\in Z, \exists k(n=2k)\}\to(1)}\ (\exists\text{左})\qquad \cfrac{\text{左と同様}}{\{n\in Z, \exists k(n=2k+1)\}\to(1)}}{\cfrac{\{n\in Z, (2)\}\to(1)}{\{n\in Z\}\to(1)}\ (\text{排中律})}\ (\vee\text{左})$$

(命題 4.4)$x\in Z$ とする．$5x-7$ が奇数のとき，$9x+2$ は偶数である．

$$\cfrac{\cfrac{\cfrac{\cfrac{\{(1), (3), (4)\}\to(4)}{\{(1), (3), (4)\}\to\exists l(9x+2=2l)}\ (\exists\text{右})}{\{(1), (3)\}\to\exists l(9x+2=2l)}\ (\text{推移律})}{\{(1), (2)\}\to\exists l(9x+2=2l)}\ (\text{置換})}{\{(1)\}\to\exists l(9x+2=2l)}\ (\text{述語の性質})}{\{\exists k(5x-7=2k+1)\}\to\exists l(9x+2=2l)}\ (\exists\text{左})$$

ただし，(1) を $5x-7=2k+1$，(2) を $9x+2=(5x-7)+(4x+9)$，(3) を $9x+2=2k+1+(4x+9)$，(4) を $9x+2=2(k+2x+5)$ としている．

(命題 4.5)$n\in Z$ とする．$1-n^2>0$ のとき，$3n-2$ は偶数である．

$$\cfrac{\cfrac{\cfrac{\cfrac{\cfrac{\{n\in Z, (2), (3), n=0, (4), (5)\}\to(5)}{\{n\in Z, (2), (3), n=0, (4), (5)\}\to(1)}\ (\exists\text{右})}{\{n\in Z, (2), (3), n=0, (4)\}\to(1)}\ (\text{推移律})}{\{n\in Z, (2), (3), n=0\}\to(1)}\ (\text{等号の性質})}{\{n\in Z, (2), (3)\}\to(1)}\ (\text{述語の性質})}{\{n\in Z, (2)\}\to(1)}\ (\text{述語の性質})$$

ただし，(1) を $\exists l(3n-2=2l)$，(2) を $1-n^2>0$，(3) を $-1<n<1$，(4) を $3n-2=3(0)-2$，(5) を $3n-2=2(-1)$ としている．

(命題 4.6)$x\in Z$ とする．$5x-7$ が偶数のとき，x は奇数である．

$$\cfrac{\cfrac{\cfrac{\cfrac{\cfrac{\{5x-7=2k, x=2l, (1), (2)\}\to\bot}{\{5x-7=2k, x=2l, (1)\}\to\bot}\ (\text{推移律})}{\{5x-7=2k, x=2l\}\to\bot}\ (\text{等号の性質})}{\{5x-7=2k, \exists l(x=2l)\}\to\bot}\ (\exists\text{左})}{\{\exists k(5x-7=2k), \exists l(x=2l)\}\to\bot}\ (\exists\text{左})}{\{\exists k(5x-7=2k)\}\to\exists l(x=2l+1)}\ (RAA)$$

ただし，(1) を $5x-7=5(2l)-7$，(2) を $5x-7=2(5l-4)+1$ としている．

5 おわりに

本研究では，実証明をシークエント体系 SNK にもとづく証明とを比較することで，cut の役割をいくつか抽出することができた．

参考文献

[1] ゲアリー・チャートランド　他 (鈴木 治郎 訳):『証明の楽しみ 基礎編』．株式会社ピアソン・エデュケーション，東京，2004.

[2] 佐々木克巳:『南山大学数理情報学部情報システム数理学科「数理論理学」講義資料』，2009.