ペンダボットのモデリングと状態フィードバック制御による安定化

2007MI101 加藤康仁
指導教員：高見勲

1 はじめに

ロボット工学で２ーリンクアームマニピュレータの簡単なモデルとして, ペンダボットは工学の一般の分野で、実験や理論検証等のために、よく用いられる倒立振子のことで、既に数多くの研究がなさてきた。また、ペンダボットは不安定であり制御系設計から実験までできる研究対象として適していると思われる。本研究では、ペンダボットの非線形モデルを導き、ミドルポジションでの線形近似を行い、そのモデルから導かれたコントローラの可制御性を調べ、ペンダボットの安定化可能性を検証する。その際、ミドルポジションを目標値とし、新たにその目標値に追従させるようなフィードバック制御を考え、ペンダボットの先端の重さを変えたときにどのような反応が見られるかシミュレーションと実験を行い検証する。コントローラにはレギュレータによる状態フィードバック制御を用いる。そこで、目標値（平衡点）へ追従性を向上させるために、新たな偏差の積分項を追加した五次拡大系を考え、追従性の高いコントローラを設計することを目標にし、レギュレータによる状態フィードバック制御を用いてシミュレーションをする。また、ペンダボットの先端の重さを変えたときのペンダボットの安定性についてはゲイン K を固定して検証をする。

2 制御対象のモデリングから制御系設計

制御対象はペンダボットと呼ばれる倒立振子のことでモデル化するときラグランジュの運動方程式 [1] によって物理モデルの状態方程式を求める。求めた状態方程式は非線形なため、ミドルポジションにおいてテーラー展開することよって線形化する [1]。
状態方程式と出力方程式は次のように与えられる。

$$\dot{x} = Ax + Bu, \tag{1}$$

$$y = Cx \tag{2}$$

ここで x は操作量、u は制御量、y を観測量とする。

3 ミドルポジションでの可制御性

可制御性となる必要十分条件は下式を満たすことである。($V(c) = [B \quad AB...A^{n-1}B]$)

$$V_c = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -128.00 & 0 & 29.42 & 0 \\ 123.59 & 0 & 41.37 & 0 \\ 0 & -128.00 & 0 & 29.42 \\ 0 & 123.59 & 0 & 41.37 \end{bmatrix}$$

$$rank(V_c) = 4$$

実際は

$$V_c = \begin{bmatrix} 0 & 16.40 & 0 & -2352.07 \\ 16.40 & 0 & -2352.07 & 0 \\ 0 & -8.57 & 0 & 1673.09 \\ -8.57 & 0 & 1673.09 & 0 \end{bmatrix}$$

となり計算すると
$rank(V_c) = 4$ となるので、可制御性である。

4 フィードバック制御

状態式が可制御であるならばどんな極にでも指定できる [1]。そこで積分器を追加し、レギュレータによる状態フィードバック制御する。また、フィードバックゲイン K を固定してペンダボット先端のおもりの重さを変えた場合の安定性について調べる。次にフィードバックブロック線図を示す。

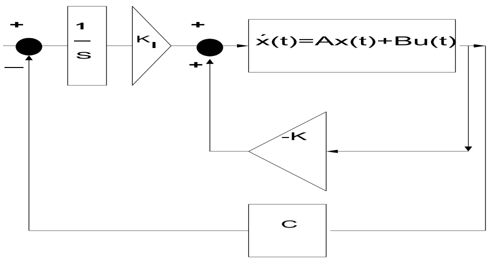

図 1 状態フィードバック

4.1 拡大システム

状態フィードバックに積分器を追加した拡大系の状態式は次のようになる。

$$\begin{bmatrix} \dot{\tilde{x}}(t) \\ \dot{\tilde{z}}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -128.00 & 0 & 29.42 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 123.59 & 0 & 41.37 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{x}(t)_1 \\ \tilde{x}(t)_2 \\ \tilde{x}(t)_3 \\ \tilde{x}(t)_4 \\ \tilde{z}(t) \end{bmatrix}$$

$$+ \begin{bmatrix} 0 \\ 16.42 \\ 0 \\ -8.57 \\ 0 \end{bmatrix} \dot{\tilde{u}}(t)$$

4.2 レギュレータ

最適レギュレータ理論 [2] では、与えられた重み行列 $Q = Q^T \geq 0$、$R > 0$ に対して、評価関数 J を最小にす

るよう与える。

$$J = \int_0^\infty [x^T Q x + u^T R u] dt \tag{3}$$

$$Q : (n \times n), R : (m \times m) \tag{4}$$

Q は半正定 (Q $\geq$ 0),R は正定 ($R > 0$) なる対称行列である。また、重み Q の増大は $x(t)$ の即応性の増大になり、重み R はの増大は制御入力 $u(t)$ の減少をもたらす。さらに、フィードバックゲインは唯一に定まり、$K = -R^{-1}B^T P$ で与えられる。ただし、P はリカッチ方程式 $PA + A^T P - PBR^1 B^T P + Q = 0$ を満足する唯一の正定対称解である。ここで

$$z(t) = -\int_0^t e(\tau) dt \tag{5}$$

である。レギュレータで求めた状態フィードバックゲイン $K = [124.8, 13.1, 159.4, 20.9, -5.4]$ を固定しておもりの重さを 0.004[kg] から 0.056[kg] まで変えたときの制御を行う。制御の際、極は状態方程式のパラメータ同様に変化する。次に極の表を示す。極を見ると、支配極 (表 4 行) には大きな変化は見られないが、表 2 行目の極を見るとおもりの重さ 0.056[kg] のときかろうじて虚軸なので安定性を保持できていることがわかる。また、このときの慣性モーメントは 0.004[kg] $\rightarrow$ 0.74[$Nm, kg \cdot m^2/s^2$],0.056 $\rightarrow$ 8.14[$Nm, kg \cdot m^2/s^2$] と 8 倍変化する。よっておもりの変化には十分と考える。

表 1　上からおもりの重さを変えたときの極の値

0.004[kg] の極	0.056[kg] の極
-10.7+16.1j	-1.0+24.9j
-10.7-16.1j	-1.0-24.9j
-0.2	-0.4
-7.5+0.1j	-2.6
-7.5-0.1j	-6.4

5　シミュレーション結果

ミドルポジションから 20 度上に持ち上げた状態を初期としてシミュレーションを行う。

次に状態フィードバックのシミュレーションを示す。

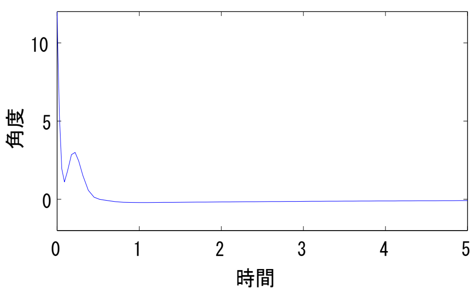

図 2　シミュレーション結果

おもりの重さを 0.004[kg] から 0.056[kg] まで変化させたときシミュレーションを下に示す。

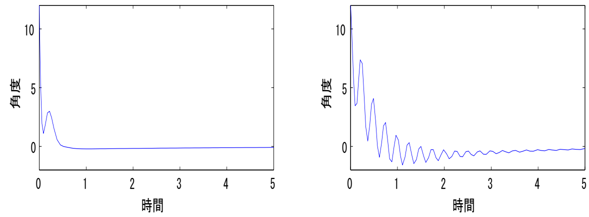

図 3　左におもりの重さ 0.004[kg]、右に 0.056[kg]

6　実験結果と考察

シミュレーション結果と実験結果を比較すると実験器を指で初期状態まで持ち上げ離すことで、初期値にばらつきがあるが、制御できているので一致したといえる。よっておもりの重さを変化させても制御に変化は見られないことが検証できている。また、おもりの重さを 0.005[kg] の慣性モーメントは 1.18[$Nm, kg \cdot m^2/s^2$] で 0.010[kg] のときは 2.92[$Nm, kg \cdot m^2/s^2$] で 2 倍変化となり検証には十分とする。次に結果を示す。

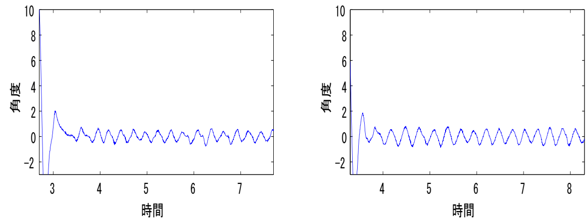

図 4　左におもりの重さ 0.005[kg]、右に 0.010[kg]

7　おわりに

本研究では、ペンダボットと呼ばれる実験装置を用いて実際に実験することで、シミュレーションと一致することを確認した。制御系設計は、制御対象の非線形モデルを線形近似化して行った [1]。そのため、シミュレーションの段階では安定した制御がみられて当然のこととなるので、より厳密な非線形モデルによるものでないといけない。本研究では、ペンダボットの特性を調べ、非線形特性が表れないようにシミュレーションを行った。また、おもりの重さを任意に 0.004〜0.056[kg] に変化させたときのシミュレーションをした。実験ではおもりの重さを 0.005〜0.010[kg] の変化で十分としてミドルポジションのペンダボットの安定性について検証した。

参考文献

[1] 坂野誠一、川津勇治「極配置によるペンダボットの制御設計」南山大学数理情報学部数理科学科 (2003)

[2] 鬼頭亜矢、光村奈緒子「状態フィードバックによる倒立振子の制御」南山大学数理情報学部数理科学科 (2004)

[3] 東方希容子「オブザーバーを用いた倒立振子の最適制御」南山大学数理情報学部数理科学科 (2004)