数式に対する考え方

2007MI094 片山晃平
指導教員：佐々木克巳

1 はじめに

杉原 [1] の記述より，数式に対して少しは疑いの目を持ち，数式の見方や考え方を見直す必要性を感じた．本研究の目的は，この見直しを行うことである．卒業論文では [1] の第 1 章と第 5 章にしたがってこの見直しの結果を示した．本稿では，このうち第 5 章に対する結果の概要を示す．

[1] の第 5 章では，行列が生まれた場面として具体的に 3 つの場面が対象とされており，各場面において，行列には，その意味を反映した名称，すなわち，線形変換行列，2 次形式係数行列，連立方程式係数行列があるとしている．

本稿では，[1] の記述の中から，3 つの概念，逆行列，行列式，転置行列をとりあげ，各場面での意味や機能などを比較する．これらは，同じ姿をしていても別の意味をもつ数式の例であり，数式の見方や考え方の理解を深めることにつながると考える．

次の節で 3 つの場面の説明を行う．3，4，5 の各節で 3 つの概念を 1 つずつ扱い，それぞれ，場面毎の比較の概観を述べる．とくに，4 節では，結果だけを述べる．

2 3 つの場面

この節では，[1] にある 3 つの場面の行列を説明する．

2.1 線形変換行列

点を点へ移す線形変換を表す行列のことを線形変換行列とよぶことにする．

2.2 2 次形式係数行列

対称行列 A を使って 2 次形式 $\mathbf{x}^t A\mathbf{x}$ を表すことができる．この対称行列を 2 次形式係数行列とよぶことにする．

また，ある定数 c に対して，式 $\mathbf{x}^t A\mathbf{x} = c \quad (\mathbf{x} = (x, y)^t)$ は，x と y の 2 変数に関する 2 次の方程式だから 2 次曲線を表す．

2.3 連立方程式係数行列

2 個の未知数 x_1,x_2 に関する連立方程式

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1$$
$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2$$

は，2 行 2 列の行列 $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ を用いて $A\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$ と表すことができる．この A を連立方程式係数行列とよぶことにする．

3 逆行列の比較

この節では，線形変換行列と連立方程式係数行列の二つの場面における逆行列の意味を考える．

二つの場面における意味を以下に示す．

・線形変換行列

線形変換行列 A が逆行列をもつことは，A による線形変換が 1 対 1 対応となっていることを意味する．

・連立方程式係数行列

連立 1 次方程式 $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ の係数行列 A が逆行列 A^{-1} をもつことは，連立 1 次方程式 $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ がただ一つの解をもち，その解は $\mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{b}$ によって得られることを意味する．

以下の 3.1 節と 3.2 節でこれらの理由を示す．

3.1 線形変換行列での逆行列

今，A が逆行列 A^{-1} をもつとする．式 $\mathbf{x}' = A\mathbf{x}$ に左から A^{-1} をかけると

$$A^{-1}\mathbf{x}' = A^{-1}A\mathbf{x} = E\mathbf{x} = \mathbf{x}$$

が得られる．したがって，$\mathbf{x}' = A\mathbf{x}$ を満たす $\mathbf{x}$ は $\mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{x}'$ によって得られる．この式は A^{-1} も，$\mathbf{x}'$ に $\mathbf{x}$ を対応させる線形変換であることを表す．この A^{-1} によって，平面上の任意の点 $\mathbf{x}'$ に対して，変換後の点 $\mathbf{x}$ が対応する．

このとき，$\mathbf{x}$ と $\mathbf{x}'$ との対応は 1 対 1 対応である．

A が逆行列をもたない場合には何が生じるか例でみてみる．$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ は逆行列をもたない．このとき

$$\mathbf{x}' = A\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+y \\ 0 \end{pmatrix}$$

となる．この変換では，45 °の角度で右下がりの直線上のすべての点がその直線と x 軸の交点へ移る．したがって，この変換は 1 対 1 ではない．また，x 軸上にない点 $\mathbf{x}''$ に対して，$\mathbf{x}'' = A\mathbf{x}'$ となる点 $\mathbf{x}$ は存在しない．

この例が示すように，A が逆行列をもたない場合には，逆変換をもたない．

3.2 連立方程式係数行列での逆行列

連立方程式 $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ の係数行列 A が逆行列 A^{-1} をもつとき，$\mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{b}$ の両辺に，左から A の逆行列 A^{-1} をかけることにより $\mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{b}$ が得られる．

A が逆行列をもたないときには，連立方程式 $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ は解を全くもたないか，あるいは解が複数存在するかのどちらかである．このことを例でみてみる．$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ は逆行列をもたない．また，2 次元列ベクトル $\mathbf{b}$ を $\mathbf{b} = (4, 8)^t$， 未知数ベクトル $\mathbf{x}$ を $\mathbf{x} = (x_1, x_2)^t$

とおく．このとき

$$A\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + 2x_2 \\ 2x_1 + 4x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 8 \end{pmatrix}$$

となる．これには $\mathbf{x} = (2,1)^t$,$\mathbf{x} = (4,0)^t$ のように解が複数存在する．また，$\mathbf{b} = (4,4)^t$ のときは

$$A\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + 2x_2 \\ 2x_1 + 4x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \end{pmatrix}$$

となる．これは見てわかるように解を全くもたない．

4　行列式の比較

この節では，線形変換行列と連立方程式係数行列の二つの場面における行列式の意味を考える．

二つの場面における意味を以下に示す．

・線形変換行列

線形変換行列 A の行列式は，A による線形変換で図形の面積が変化する割合を表す．

・連立方程式係数行列

連立方程式係数行列の行列式は，Cramer の公式に現れる．

5　直交行列においての比較

この節では，線形変換行列と 2 次形式係数行列の二つの場面における直交行列の意味を考える．

直交行列の定義を以下に示す．

定義　2 行 2 列の行列 A とその転置行列 A^t に対して，$A^tA = E$　が満たされるとき，A を直交行列という．

二つの場面における意味を以下に示す．

・線形変換行列

線形変換行列 A が直交行列であることは，A による線形変換が合同変換 (任意の 2 点の間の距離を変えない変換) であることを意味する．

・2 次形式係数行列

2 次形式係数行列 A と直交行列 T に対し，TAT^t も 2 次形式係数行列であり，平面上の点に T を使って変換を施すと，A の表す 2 次曲線は TAT^t の表す 2 次曲線に変わる．また，直交行列 T が合同変換であること (5.1 節参照) と，対角化定理により，同じ 2 次曲線に対する $\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$ の形の 2 次係数行列を求めることができる．

以下の 5.1 節と 5.2 節でこれらの理由を示す．

5.1　線形変換行列での直交行列

線形変換 $\mathbf{x}' = A\mathbf{x}$　$(A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix})$ が合同変換となるときはどんなときかを調べてみる．

点 $\mathbf{x}_1$,$\mathbf{x}_2$ の座標をそれぞれ (x_1, y_1),(x_2, y_2) とし，線形変換行列 A によってそれらの点が $\mathbf{x}'_1$,$\mathbf{x}'_2$ に移り，その座標が (x'_1, y'_1),(x'_2, y'_2) であるとする．変換によって距離が変わらないという性質は

$$(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 = (x'_1 - x'_2)^2 + (y'_1 - y'_2)^2 \qquad (5.1)$$

と表すことができる．この式に $\mathbf{x}' = A\mathbf{x}$ を代入すると右辺は

$(x'_1 - x'_2)^2 + (y'_1 - y'_2)^2$
$= (a_{11}^2 + a_{21}^2)(x_1 - x_2)^2 + (a_{12}^2 + a_{22}^2)(y_1 - y_2)^2 + 2(a_{11}a_{12} + a_{21}a_{22})(x_1y_1 + x_2y_2 - x_1y_2 - x_2y_1)$

となる．この式と，式 (5.1) の左辺とが，すべての x_1,y_1,x_2,y_2 に対して等しくならなければならない．そのためには $(x_1 - x_2)^2$，$(y_1 - y_2)^2$，$(x_1y_1 + x_2y_2 - x_1y_2 - x_2y_1)$ の係数が等しくならなければならないから，次の 3 つが成り立つ．

$a_{11}^2 + a_{21}^2 = 1,$
$a_{12}^2 + a_{22}^2 = 1,$
$a_{11}a_{12} + a_{21}a_{22} = 0$

この 3 式をあわせて，次のように書くこともできる．

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

さらに，A^t を使うと，この式は　$A^tA = E$　と書くことができ A は直交行列とわかる．

以上より，A が合同変換であれば A は直交行列であるとわかった．この操作は逆にたどることもできる．すなわち，線形変換行列 A に対して，A が直交行列であることと A による変換が合同変換であることは同値である．

5.2　2 次形式係数行列での直交行列

ここでは，2 次形式係数行列 A の表す 2 次曲線

$$\mathbf{x}^tA\mathbf{x} = c \quad (c > 0) \qquad (5.2)$$

を考える．これを直交行列 T で変換して，TAT^t の表す 2 次曲線が得られることを示す．

平面上の点 $\mathbf{x} = (x, y)^t$ を T が移す点を $\mathbf{x}' = (x', y')^t$ とすると

$$\mathbf{x}' = T\mathbf{x} \qquad (5.3)$$

となる．直交行列の定義より，T の逆行列は T の転置行列 T^t だから，式 (5.3) の両辺に左から T^t をかけると

$$T^t\mathbf{x}' = T^tT\mathbf{x} = \mathbf{x} \qquad (5.4)$$

が得られる．この式の最も左の辺と最も右の辺の転置をとり，左右を入れ換えると

$$\mathbf{x}^t = (T^t\mathbf{x}')^t = (\mathbf{x}')^t(T^t)^t = (\mathbf{x}')^tT \qquad (5.5)$$

が得られる．

式 (5.3) の形の変換によって，点を表す変数ベクトルを $\mathbf{x}$ から $\mathbf{x}'$ に移した結果は，式 (5.4) と式 (5.5) を式 (5.2) に代入して得られる．その結果は，$(\mathbf{x}')^tTAT^t\mathbf{x}' = c$ となり，TAT^t の表す 2 次曲線が得られた．

6　おわりに

3 つの概念，逆行列，行列式，転置行列をとりあげ，各場面での意味や機能などを比較することができた．また，これらは，同じ姿をしていても別の意味をもつ数式の例であり，その理解を深めることにつながった．

参考文献

[1] 杉原厚吉：『数式を読みとくコツ』．東京．日本評論社．2008 年．