

オプションの最適戦略と価格評価

— 離散モデルについて —

2007MI059 兵藤育郎 2007MI253 鶴飼尚

指導教員：澤木勝茂

1 はじめに

今や、金融工学は世の中になくはない分野である。例えば、企業が新しい事業を起こすためには資金を必要とする。そこで資金調達をするためにはあらゆる資産への投資の意思決定をおこなわなければならない。しかし、投資には将来という不確実性の下でリスクを常に伴っている。このリスクを少しでも緩和し、投資家の合理的投資行動を促すという意味で、金融工学の研究は非常に興味深い分野であると考えられる。

本論では金融工学におけるオプションの最適戦略（行使境界）とオプションの価格評価について研究をおこなう。ファイナンス理論は離散時間と連続時間に分けることができるが、単純な離散時間に焦点を当て議論していくことにする。解法の1つとして動的計画法を用いて解いていく（沢木 [5] 参照）。

2 オプション評価のための数学的準備

2.1 記号の定義

- t : 現時点での時刻
- T : 満期日
- $S(t)$: 時刻 t における資産価格 ($S = S(0)$)
- K : 行使価格
- n : 分割数
- Δt : 時間変化分
- C : コールオプション価格
- P : プットオプション価格
- $V_t(j)$: 時刻 t までにジャンプが j 回した時の時刻 t におけるオプション価値
- j : ジャンプ(上昇)の回数
- p : リスク中立確率
- σ : ボラティリティ
- r : 無危険利子率
- u : 資産価格の上昇率
- d : 資産価格の下落率
但し, $d = 1/u$

2.2 リスク中立化法

リスク中立確率 p の下で原資産価格の合理的な上昇率 u と下落率 d を導出する（森平・小島 [7] 参照）。資産価格（株価）が幾何ブラウン運動

$$dS(t) = \mu S(t)dt + \sigma S(t)dW(t) \quad (1)$$

に従うとする。 W は確率空間 (Ω, \mathcal{F}, P) 上の標準ブラウン運動である。この式にはドリフト項が含まれており、これをリスク中立的なドリフト項のない確率過程へと変換しそれに伊藤の公式を適用すると

$$d(\log S(t)) = \left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right) dt + \sigma d\tilde{W}(t) \quad (2)$$

を得る。以下議論を展開していく中で便宜上 $\eta = r - \frac{1}{2}\sigma^2$ とおく。原資産価格のリスク中立過程を示す式は連続型の確率微分方程式である。これを離散時間上で扱うために離散化する。

$$dt \approx \Delta t = T/n, \quad t = i\Delta t \text{ for } i = 0, 1, \dots, n, \\ dS(t) \approx \Delta S(t), \quad d\tilde{W}(t) \approx \sqrt{\Delta t}. \quad (3)$$

上記のようにおくことで、確率微分方程式を確率差分方程式で近似する。時刻 t における株価 $S(t)$ に対して

$$\Delta(\log S(t)) = \eta\Delta t + \sigma\sqrt{\Delta t}. \quad (4)$$

式 (4) の平均と分散をとり、それらを連立して解くことでリスク中立的な原資産価格の上昇率 $u = e^{\sigma\sqrt{\Delta t}}$ と下落率 $d = e^{-\sigma\sqrt{\Delta t}}$ が導かれる。

3 最適戦略

ヨーロピアン・オプションは満期 T でのみ行使可能である。よって行使時刻は T である。一方、アメリカン・オプションは期首から満期までの任意の時点で行使可能なオプションである。それではいつ行使するのが最適なのか、最適行使時刻を導出していく。

3.1 アメリカン・コールオプション

アメリカン・コールオプションを考察する（S・E・シュリーヴ [4] 参照）。満期 T , 時刻 t とし, $0 \leq t \leq T$ の時刻の間ならいつでも権利を行使できると仮定する。アメリカン・コールオプションは満期 T で権利行使が最適である。株価 $\frac{1}{(1+r)^t} S(t)$ がリスク中立確率のもとマルチンゲール, Jensen の不等式とペイオフ関数 $g(s)$ の凸関数の性質を用いて,

$$C = \max_{0 \leq t \leq T} E \left[\frac{1}{(1+r)^t} \max[S(t) - K, 0] \right] \\ \leq E \left[\frac{1}{(1+r)^T} \max[S(T) - K, 0] \right]. \quad (5)$$

3.2 配当がある場合のコールオプションモデル

配当支払い日を離散時間 t , 配当までの間の時間を $k(1 < 2 < \dots < n-1 < n)$, 配当率を δ , 配当があるの株価モデルを $S(t_{k-})$ とおく。株価を含むポートフォリオの価値は $(1+\delta)(t_k)S(t_{k-})$ 分だけ下落する。

配当支払い直前の時刻 t_n において、アメリカン・コールオプションの所有者には2つの選択があり、1つはオプションを講師し $S(t_{n-}) - K$ を受け取ることであり、そしてもう1つは行使せずに、配当支払いおよび資産価格が $S(t_n) = (1-\delta)S(t_{n-})$ に下落することを認め、 $c_n(t_n, (1-$

$\delta)S(t_n-)$ のオプション価値を保有することである．配当が支払われる直前の時刻 t_n におけるコールオプション価格は，関数 $h_n(S(t_n-))$ と表される．

$$h_n(S(t_n-)) = \max\{S(t_n-) - K, c_n(t_n, (1-\delta)S(t_n-))\}. \quad (6)$$

3.3 アメリカン・プットオプション

任意の時刻で行使可能であるアメリカン・プットオプションの時刻におけるペイオフの価値は

$$V_T = \max\{K - S(T), 0\}, \quad (7)$$

$$V_t = \max\left\{K - S(t), \frac{1}{1+r} E[V_{t+1}(\cdot)]\right\}, \quad 0 \leq t < T \quad (8)$$

で与えられる．ここで $S(T)$, $S(t)$ をジャンプ j を用いて以下のように表すことができる．

$$S(T) = u^j d^{T-j} S(0), \quad (9)$$

$$S(t) = u^j d^{t-j} S(0). \quad (10)$$

3.3.1 停止時刻

アメリカン・オプションは任意の時刻 t で権利を行使することができる．そこで停止時刻 τ を定義し，停止時刻とその性質について見ていく (S・E・シュリーヴ [4] 参照)．停止時刻 τ のとりうる全体集合を $\mathcal{F}_t = \{t, t+1, \dots, T, \infty\}$ とすると，

$$V_t = \max_{\tau \in \mathcal{F}_t} E_t \left[\frac{1}{(1+r)^{\tau-t}} (K - S(\tau)) \right]. \quad (11)$$

但し $\tau = \infty$ のときは権利を行使しなかった場合であり $V_t = 0$ である．また満期 T では $V_T = \max\{K - S(T), 0\}$ であり，すべての t に対して $V_t \geq \max\{K - S(t), 0\}$ である． t を所与とし， $\tau' \in \mathcal{F}_{t+1}$ が V_{t+1} の定義式の最大を満たすそのとき，時刻 t において V_{t+1} の期待値をとると，

$$V_t \geq E_t \left[\frac{1}{1+r} V_{t+1} \right] \quad (12)$$

を得る．式 (12) の両辺を $(1+r)^t$ で割ると，

$$\frac{1}{(1+r)^t} V_t \geq E_t \left[\frac{1}{(1+r)^{t+1}} V_{t+1} \right] \quad (13)$$

となり，優マルチンゲールを得る．すなわち，早期行使が最適となる．

3.3.2 2項ツリーモデル

2項ツリーモデルは資産価格 S が確率 p で uS ，確率 $1-p$ で dS となる基本的なモデルである．2項モデルにおけるジャンプに対するペイオフ関数 $A_t^2(j)$ を定義すると

$$A_t^2(j) = \max\left\{K - \left(\frac{u}{d}\right)^j d^t S, 0\right\}. \quad (14)$$

$d < 1$ であるから $A_t^2(j)$ は t の増加関数である．また $u/d > 1$ であるから $A_t^2(j)$ は j の減少関数である．ここで式 (14) の $K - \left(\frac{u}{d}\right)^j d^t S$ を 0 にする $j (= j_t^{*(2)}$ とおく) を求めると，

$$j_t^{*(2)} = \frac{\log \frac{K}{S d^t}}{\log \left(\frac{u}{d}\right)}. \quad (15)$$

3.3.3 3項ツリーモデル

次に2項ツリーモデルの拡張として3項ツリーモデルを考える．3項ツリーは2項ツリーに加えて資産価格の現状維持のポジション m が追加される．3項モデルにおけるジャンプに対するペイオフ関数 $A_{t,m}^3(j)$ を定義すると

$$A_{t,m}^3(j) = \max\left\{K - \left(\frac{u}{d}\right)^j d^{t-m} S, 0\right\}. \quad (16)$$

$d < 1$ であるから $A_{t,m}^3(j)$ は t の増加関数， m の減少関数である．また $u/d > 1$ であるから $A_{t,m}^3(j)$ は j の減少関数である．ここで式 (16) の $K - \left(\frac{u}{d}\right)^j d^{t-m} S$ を 0 にする $j (= j_{t,m}^{*(3)}$ とおく) を求めると，

$$j_{t,m}^{*(3)} = \frac{\log \frac{K}{S d^{t-m}}}{\log \left(\frac{u}{d}\right)}. \quad (17)$$

3.3.4 2項モデルと3項モデルの比較

これまで挙げてきた2項と3項モデルの時刻 t におけるオプション価値の差をとると $V_{t,m}^3(j) - V_t^2(j) = \left(\frac{u}{d}\right)^j (1 - d^{-m}) S \leq 0$ となり，ジャンプの差をとると $j_{t,m}^{*(3)} - j_t^{*(2)} = -\frac{m}{2}$ となる．よって2項モデルよりも3項モデルの方がオプション価値が低く見積もられることを示唆している．

3.3.5 アメリカン・プットオプションの最適戦略

改めて停止時刻 τ^* を定義すると，アメリカン・プットオプションの最適戦略はオプション価値 V_t に着目すると3.3.1節より，

$$\tau^* = \min\{t; V_t = K - S(t)\}. \quad (18)$$

またジャンプ関数 j_t に着目すると3.3.2節，3.3.3節より，

$$\tau^* = \min\{t; j_t \leq j_t^*\}. \quad (19)$$

4 オプションの価格評価

4.1 コールオプション

4.1.1 CRR モデル

コールオプション (コールオプションはヨーロピアンもアメリカンは最適停止が満期なので一緒に考える) のリスク中立確率における2項モデルの価格評価式について示す (原田 [2] 参照)．満期 T とし， T を n で分割した n 期間モデル (通称 CRR (コックス・ロス・ルービンシュタイン) モデル) $T = n\Delta t$ を帰納法より求める．コールオプション評価価格は，

$$j_0 = \left\lceil \frac{\log \frac{u}{d}}{\log \frac{K}{d^n S}} \right\rceil + 1 \quad ([\] \text{ はガウス記号}),$$

$$\frac{u}{1+r} p = p_0 \text{ と } \frac{u}{1+r} (1-p) = 1-p_0 \text{ より,}$$

$$C = S \frac{1}{(1+r)^n} \sum_{j=j_0}^n \binom{n}{j} p_0^n (1-p_0)^{n-j} - \frac{K}{(1+r)^n} \sum_{j=j_0}^n \binom{n}{j} p^j (1-p)^{n-j}. \quad (20)$$

4.1.2 ブラックショールズモデル

CRR モデルからブラックショールズモデルを導く. n 期間 2 項モデルにおいて, $n \rightarrow \infty$ のとき極限をとり時間幅を小さくして, 中心極限定理によりオプション価格を求めてみる. 時間間隔 T を分割して $T = n\Delta t$ とおく. 2 項モデルのオプション価格をブラックショールズモデルに収束させる.

$$C = S\phi(d_1) - Ke^{-rT}\phi(d_2),$$

$$d_1 = \frac{\log \frac{S}{K} + \left(r + \frac{\sigma^2}{2}\right)T}{\sigma\sqrt{T}}, \quad d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T}. \quad (21)$$

但し $\phi(\cdot)$ は標準正規分布を表す.

4.2 配当がある場合のコールオプションモデル

配当は離散的に取り扱える配当率 δ として考え, 原資産の変動は $u(1+\delta)$, $d(1+\delta)$ とし, 離散変動モデルにおいてリスク中立確率を求め, 配当ありの価格評価式を求める (小林 [3] 参照).

$$C = \frac{1}{(1+\delta)^n} \sum_{j=j_0}^n \binom{n}{j} \left\{ \frac{up(1+\delta)}{(1+r)} \right\}^j \left\{ \frac{d(1-p)(1+\delta)}{(1+r)} \right\}^{n-j} - \frac{K}{(1+r)^n} \sum_{j=j_0}^n \binom{n}{j} p^j (1-p)^{n-j}$$

$$j_0 = \left\lceil \frac{\log \frac{u}{d}}{\log \frac{K}{d^n S}} \right\rceil + 1 \quad ([\] \text{ はガウス記号}). \quad (22)$$

4.3 ヨーロピアン・プットオプション

満期を T とするヨーロピアン・プットオプション価格 P^E は, ヨーロピアン・コールオプションにおける CRR モデルの価格評価式にプット・コール・パリティを適用することで導かれる (田畑 [6] 参照).

$$P^E = \frac{K}{(1+r)^T} B(T, p) - SB(T, p_0). \quad (23)$$

但し $B(\cdot)$ は二項分布を表す.

4.4 アメリカン・プットオプション

満期 T に対して任意の時刻 τ で行使可能なアメリカン・プットオプション価格を P^A とすると,

$$P^A = \max_{\tau \in [0, T]} E \left[\frac{1}{(1+r)^\tau} (K - S(\tau)) \right] \quad (24)$$

で与えられる. ここでアメリカン・プットオプション価格評価に当り, 対数 $x = \log S$ をとって次のモデルを構築していく.

4.4.1 対数 2 項ツリーモデル

2 項ツリーにおける資産価格 (株価) の対数 x は確率 p_u で $x + \Delta x_u$, 確率 p_d で $x - \Delta x_d$ となる. そのとき, 時刻におけるオプション価値は

$$\hat{V}_T^2(j) = \max \left\{ K - e^{j\Delta x} e^{(t-j)\Delta x} \cdot e^x, 0 \right\}, \quad (25)$$

$$\hat{V}_t^2(j) = \max \left\{ K - e^{j\Delta x} e^{(T-j)\Delta x} \cdot e^x, \frac{1}{1+r} E[V_{t+1}(\cdot)] \right\} \quad (26)$$

である. ここで

$$\begin{cases} E[\Delta x] &= p_u(\Delta x_u) + p_d(-\Delta x_d) = \eta\Delta t, \\ E[\Delta x^2] &= p_u(\Delta x_u^2) + p_d((-\Delta x_d)^2) \\ &= \sigma^2\Delta t + \eta^2\Delta t^2, \\ p_u + p_d &= 1. \end{cases}$$

4.4.2 対数 3 項ツリーモデル

3 項ツリーにおける資産価格 (株価) の対数 x は確率 p_u で $x + \Delta x$, 確率 p_m で x , 確率 p_d で $x - \Delta x$ となる. そのとき, 時刻におけるオプション価値は

$$\hat{V}_{T,m}^3(j) = \max \left\{ K - e^{j\Delta x} e^{((t-m)-j)\Delta x} \cdot e^x, 0 \right\}, \quad (27)$$

$$\hat{V}_{t,m}^3(j) = \max \left\{ K - e^{j\Delta x} e^{((t-m)-j)\Delta x} \cdot e^x, \frac{1}{1+r} E[V_{t+1}(\cdot)] \right\} \quad (28)$$

である. ここで

$$\begin{cases} E[\Delta x] &= p_u(\Delta x) + p_m(0) + p_d(-\Delta x) = \eta\Delta t, \\ E[\Delta x^2] &= p_u(\Delta x^2) + p_m(0) + p_d((-\Delta x)^2) \\ &= \sigma^2\Delta t + \eta^2\Delta t^2, \\ p_u + p_m + p_d &= 1. \end{cases}$$

5 数値例とグラフ

5.1 CRR モデルとブラックショールズモデルの比較

初期株価 $S = 10000$, 行使価格 $K = 10000$, 満期 $T = 50$ ($0 \leq t \leq T$), 無危険利率率 $r = 0.05$ とし, 株価の上昇率 $u = 1.2$, 下落率 $d = 1/u$, 連続のボラティリティ $\sigma = 0.3$ とする.

表 1 CRR モデル

S	K	T	u	d	CRR
10000	10000	0	1.2	0.83	2000
10000	10000	25	1.2	0.83	11077.82
10000	10000	50	1.2	0.83	11914.81

表 2 ブラックショールズモデル

S	K	T	σ	BS
10000	10000	0	0.3	2000
10000	10000	25	0.3	11203.36
10000	10000	50	0.3	11933.08

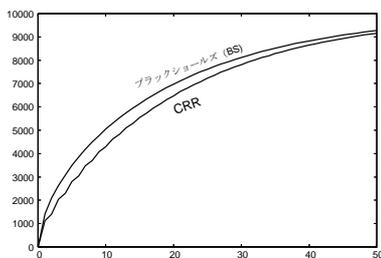


図1 CRR から BS への近似

表1, 表2と図1より, 離散モデルは連続モデルより価値が低いというのが分かる. 期間を大きくするにつれ価値が連続モデルに近似し, 期間が小さいと価値の差が大きい.

5.2 配当がある場合のコールオプション価格評価

初期株価 $S = 10000$, 行使価格 $K = 10000$, 満期 $T = 50 (0 \leq t \leq T)$, 無危険利子率 $r = 0.05$ とする. 株価の上昇率 $u = 1.2$, 下落率 $d = 1/u$ とし, 配当率 δ を変化させ, 最適停止時刻 t^* を求め比較する.

表3 コールオプションの配当率比較

S	K	T	δ	t^*	CRR
10000	10000	50	1.00	50	9914.82
10000	10000	50	1.01	26	6889.80
10000	10000	50	1.02	20	5303.35
10000	10000	50	1.03	16	4257.06
10000	10000	50	1.04	14	3531.62
10000	10000	50	1.05	12	3027.38

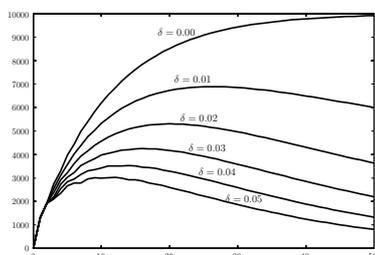


図2 δ 変化に対するアメリカン・コールオプション価格

表3と図2より, 配当率が上がることにより, オプション価値が下がり最適停止時刻も早期行使が有効になる.

5.3 プットオプション価格の数値例

初期株価 $S = 10000$, 行使価格 $K = 10000$, 無危険利子率 $r = 0.05$ としてオプション価格評価をおこなった.

表4 ボラティリティを変化させた場合

	σ	T	Δx	S	K	P^A
2項	0.20	50	0.12	10000	10000	1231.38
3項	0.20	50	0.20	10000	10000	1210.39
2項	0.30	50	0.17	10000	10000	2299.53
3項	0.30	50	0.30	10000	10000	2307.16

対数3項モデルにおける Δx は Les Clewlow and Chris Strickland[1] で $\sqrt{3\Delta t}$ と仮定しているが, 明確には求められていない. そこで表4における Δx に着目し, 縦軸にオプション価格 P^A , 横軸に Δx をとりグラフ化した.

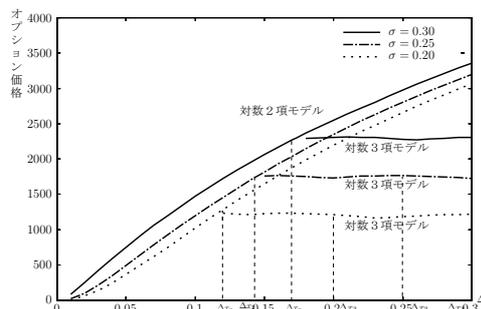


図3 Δx 変化に対するアメリカン・プットオプション価格

図3より, プットオプション価格(価値)はボラティリティが大きくなる程, 高くなる事が分かる. また Δx 変化に対して2項モデルにおいては Δx が大きくなる程, オプション価格が高くなる事が分かる. 3項モデルでは $\hat{V}_{t,m}^3(j)$ に m ($\hat{V}_{t,m}^3(j)$ は m の減少関数)が含まれているため, 大きな変化は見られない.

6 おわりに

本論では離散モデルに着目し, より単純な過程からモデルを構築することでオプションの最適戦略と価格評価をおこなった. さらに離散時間上という利点を活かし, ジャンプを考慮したモデルを構築して理論を展開することができた. 次なる段階として, 本研究も含め数理モデルを現実世界に適用させていくことが重要であると考え. 但し, 現実世界とファイナンス理論をつなげることは複雑であり, 実際に確率変数を用いて将来をモデル化することは容易ではない. この複雑な過程のさらなる解析をおこない, より現実に近い次元で理論を展開していくことが今後の課題である.

参考文献

- [1] Les Clewlow and Chris Strickland (あさひ銀行金融基礎研究所・葛山康典 訳): 『ファイナンス工学大系シリーズ』『金融工学プログラミング』エコノミスト社, 2001.
- [2] 原田重寿: 『金融・証券のためのブラック・ショールズ式の応用』東京図書株式会社, 2000.
- [3] 小林道正: 『デリバティブと確率』朝倉書店, 2001.
- [4] S・E・シュリーヴ(長山いづみ 訳): 『ファイナンスのための確率解析I』シュプリンガー・フェアラーク, 東京, 1992.
- [5] 沢木勝茂: 『ファイナンスの数理』朝倉書店, 1994.
- [6] 田畑吉雄: 『フリーランチと金融工学』牧野書店, 2009.
- [7] 森平爽一郎, 小島裕: 『コンピューテーショナルファイナンス』朝倉書店, 1997.