群の構造

2007MI029 半谷茂樹
指導教員：佐々木克巳

1 はじめに

本研究の目的は、群の構造を理解するための最も基本的なものの 1 つである同型定理の理解である。その理解は、斉藤 [1] を用いて、省略されている証明や記号を補いながら行った。特に、斉藤 [1] における、異なる演算を同様に省略したいくつかの表現に対して、本研究ではしっかりと演算を区別した表現を与えた。この要旨にある準同型定理の証明はその例である。卒業論文では、第一同型定理と第二同型定理も扱い、その証明を理解したが、本稿では、準同型定理とそれに必要な定義と性質を述べる。

2 群の定義

ここでは、群と部分群の定義と性質を述べる。

定義 2.1 空でない集合 G と 2 項演算 $\cdot$ が与えられていて、次の 4 つの条件を満たすとき、G は $\cdot$ に関して群、あるいは単に、G は群であるという。G の任意の元 a, b が 2 項演算 $\cdot$ に関して群であるとき、a と b による演算結果を $a \cdot b$ または、ab と書く。

1)(閉鎖律) G は演算 $\cdot$ に関して閉じている。すなわち、G の任意の元 a, b に対して、$a \cdot b \in G$ が成り立つ。

2)(結合律) G の任意の元 a, b, c に対して、$(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$ が成り立つ。

3)(単位元の存在) G の任意の元 a に対して、$e \cdot a = a \cdot e = a$ が成り立つ。この元 e を G の単位元という。

4)(G の各元に対する逆元の存在) G の任意の元 a に対して、G のある元 x が存在して、$a \cdot x = x \cdot a = e$ が成り立つ。この x を a の逆元といい、a^{-1} とかく。

定義 2.2 群 G の部分集合 H が G と同じ演算に関して群になるとき、H は G の部分群であるという。

定義 2.3 群 G の部分集合 A, B および G の元 a, b に対して、

1)$AB = \{xy; x \in A, y \in B\}$

2)$Ab = \{xb; x \in A\}$

3)$aB = \{ay; y \in B\}$

と定義する。G の演算 $\cdot$ と、他の演算の区別を明確にしたいときは、上記をそれぞれ、$A \cdot B$,$A \cdot b$,$a \cdot B$ と表現する。

補題 2.4 群 G の任意の部分群 H に対して、$HH = H$ が成り立つ。

定義 2.5 群 G の部分群 H があるとき、G 上の関係$\sim$を次のように定める。

$$a, b \in G \text{ に対して、} a \sim b \Leftrightarrow a^{-1}b \in H$$

このとき、$\sim$は同値関係であり、その商集合 $G/\sim$ は $\{aH; a \in G\}$ である。この商集合 $G/\sim$ を G/H と表現する。

3 正規部分群と商群

ここでは、正規部分群の性質を述べる。

定義 3.1 N を群 G の部分群とする。G の任意の元 a および N の任意の元 x に対して、$axa^{-1} \in N$ が成り立つとき、N を G の正規部分群という。

補題 3.2 群 G の部分群を N とする。次の命題は互いに同値である。

0)N は G の正規部分群である。

1) 任意の $a \in G$ に対して、$aN = Na$

補題 3.3 G を群、N を G の正規部分群とする。任意の $n \in N$、$a \in G$ に対して、ある $n' \in N$ が存在して、$na = an'$ が成り立つ。

補題 3.4 群 G の正規部分群 N がある。G の任意の元 a, b に対して、$a^{-1} \cdot b \in N$ と $aN = bN$ は同値である。

補題 3.5 G を群、N を G の正規部分群とする。また、商集合 G/N の元を $aN, bN (a, b \in G)$ とする。

1)aN と bN の積 $(aN) * (bN)$ を abN と定義することができる。

2)$(aN) * (bN) = (aN) \cdot (bN)$

証明

1) の証明　$a(= ae)$ は aN の元である。aN の元 $a' \in aN$ と、bN の元 $b' \in bN$ をとったとき、$a'b'N = abN$ を示せばよい。これを示す。$a' \in aN, b' \in bN$ より、$a' = an, b' = bn (n, m \in N)$ とかける。よって、

$$a'b' = (an)(bm) = a(nb)m$$

となる。また、補題 3.3 より、$nb = bn' (n' \in N)$ とかけることから、補題 2.4 より

$a'b' = a(bn')m = (ab)(n'm) \in (ab)(NN) = (ab)N$

である。よって、同値類の性質より $abN = a'b'N$ である。

2) の証明

$$\begin{aligned}
(aN) * (bN) &= \{(an) \cdot (bn'); n, n' \in N\} \\
&= \{a(nb)n'; n, n' \in N\} \\
&= a(Nb)N \\
&= a(bN)N && \because \text{補題 } 3.2 \\
&= \{abnn'; n, n' \in N\} \\
&= abNN \\
&= abN && \because \text{補題 } 2.4
\end{aligned}$$

補題 3.5 の 2) より、$(aN)*(bN)$ を $(aN)(bN)$ とかいても混乱が生じることはない。

4 準同型定理

ここでは、準同型定理の証明、および、それに必要な準備を行う。

定義 4.1 G, G' を群、f を G から G' への写像とする。G の任意の元 a, b に対して、

$$f(a \bullet b) = f(a) * f(b)$$

が成り立つとき、f を G から G' への準同型写像という。さらに、f が全単射のとき、f を G から G' への同型写像という。また、G から G' への同型写像が存在するとき、G と G' は互いに同型であるという。ただし、$\cdot$ は群 G の演算、$*$ は群 G' の演算である。

補題 4.2 G, G を群、f を G から G' への準同型写像とするとき、以下の 2 つが成り立つ。
1)$f(e) = e'$
2)$f(a^{-1}) = (f(a))^{-1}$
ただし、e, e' はそれぞれ G, G' の単位元である。

定理 4.3 N が群 G の正規部分群のとき、G の元 a に商群 G/N の元 aN を対応させる写像 f は G から G/N への準同型写像である。

証明 群 G の演算を $\cdot$、群 G/N の演算を $*$ とする。このとき、a と b が G の元なら、

$$\begin{array}{rcll} f(a)*f(b) & = & (aN)*(bN) & \because f \text{ の定義} \\ & = & (a\cdot b)N & \because \text{補題 3.5} \\ & = & f(a\cdot b) & \because f \text{ の定義} \end{array}$$

である。

補題 4.4 f を群 G から群 G' への準同型写像とする。
1)G の f による像集合

$$f[G] = \{f(x); x \in G\}$$

は G' の部分群である (f は G から $f[G]$ への準同型全射とみなされる)。
2)G' の単位元 e' の f による逆像

$$f^{-1}[e'] = \{x \in G; f(x) = e'\}$$

は G の正規部分群である。

定義 4.5 補題 4.4 の 1) の $f[G]$ を G の像群といい、補題 4.4 の 2) の $f^{-1}[e']$ を f の核という。

定理 4.6 (準同型定理)

f を群 G(演算は $\cdot$) から群 G'(演算は $*$ 、単位元は e') への準同型写像とし、その核を N とする。このとき、商群 G/N と像群 $f[G]$ は互いに同型である。その同型写像

$$[f]: G/N \longrightarrow f[G]$$

は次のように定義される。

$$G/N \text{ の元 } a\cdot N \text{ に対して、} [f](a\cdot N) = f(a)$$

証明 ここでは、$\cdot$ と $*$ は省略せず、G/N の演算は省略して、3 つの演算を区別する。次の 3 条件を満たせばよい。
1)$[f]$ が定義される、すなわち、もし $a\cdot N = b\cdot N$ ならば、$f(a) = f(b)$ である。
2)$[f]$ は準同型写像である。
3)$[f]$ は全単射である。

1) を示す。

$$\begin{array}{rcl} & a\cdot N = b\cdot N & \\ \Rightarrow & a^{-1}\cdot b \in N & \because \text{補題 3.4} \\ \Rightarrow & f(a^{-1}\cdot b) = e' & \because \text{核の定義} \\ \Rightarrow & f(a^{-1})*f(b) = e' & \because \text{定義 4.1} \\ \Rightarrow & f(a)^{-1}*f(b) = e' & \because \text{補題 4.2 の 2)} \\ \Rightarrow & f(a) = f(b) & \because f(a) \text{ を左から操作} \end{array}$$

2) を示す。

$$\begin{array}{rcl} & [f]((a\cdot N)(b\cdot N)) & \\ = & [f]((a\cdot b)\cdot N) & \because \text{補題 3.5} \\ = & f(a\cdot b) & \because [f] \text{ の定義} \\ = & f(a)*f(b) & \because \text{定義 4.1} \\ = & [f](a\cdot N)*[f](b\cdot N) & \because [f] \text{ の定義} \end{array}$$

3) を示す。$[f]$ は明らかに全射だから、単射であることを示す。

$$\begin{array}{rcl} & [f](a\cdot N) = [f](b\cdot N) & \\ \Rightarrow & f(a) = f(b) & \because [f] \text{ の定義} \\ \Rightarrow & (f(a))^{-1}*f(b) = e' & \because (f(a))^{-1} \text{ を左から操作} \\ \Rightarrow & f(a^{-1})*f(b) = e' & \because \text{補題 4.2 の 2)} \\ \Rightarrow & f(a^{-1}\cdot b) = e' & \because \text{定義 4.1} \\ \Rightarrow & a^{-1}\cdot b \in N & \because \text{核の定義} \\ \Rightarrow & a\cdot N = b\cdot N & \because \text{補題 3.4} \end{array}$$

である。

5 おわりに

本研究では、群の構造を理解するための 1 つの定理である同型定理の理解に努めた。斉藤 [1] で省略されている証明や記号を補う過程で、今後、数学の文献を読む場合は、省略されている記号等を確認しながら進めていくべきだと感じた。

参考文献

[1] 斉藤雅彦：『はじめての群論』. 日本評論社, 東京, 2005.