

変数変換による高精度積分則

2007MI012 荒木千綾

指導教員：杉浦洋

1 はじめに

Gauss 積分則や Clenshaw-Curtis 積分則は積分区間の端点に強く集積した標本点を用いる。これら，多項式近似を基礎とする積分則が $\pi/2$ 倍標本点を浪費する可能性について述べる。それを避けるために，収束楕円を無限帯領域，あるいは直線的な境界を持つ領域に等角写像することにより，多項式近似によらない新しい積分法を提案する。

2 変換積分法

f は区間 $[-1, 1]$ で解析的な関数であると仮定する。定積分

$$I = I(f) = \int_{-1}^1 f(x) dx \quad (1)$$

を近似する次のタイプの積分則を考える。

$$I_n = I_n(f) = \sum_{k=1}^n \omega_k f(x_k) \quad (2)$$

ここで， $\{x_k\}$ は標本点， $\{\omega_k\}$ は重みと言う。

楕円領域 E_ρ を定義する。 $\rho > 1$ に対し，複素平面上で $-1, 1$ を焦点とする閉楕円領域， $E_\rho = \{|z-1| + |z+1| \leq \rho + \rho^{-1}\}$ $\rho > 1$ において，被積分関数が解析的であることを仮定する。この楕円は，長半径と短半径の和が ρ であり，写像 $w = (z + z^{-1})/2$ による，原点を中心とする半径 ρ の円板の像である。例として，Gauss 則に関する次の定理 [2][3][4] を挙げる。

定理 2.1 ある $\rho > 1$ に対し， $f(z)$ が E_ρ で解析的であるとする。このとき， $M = \max\{|f(z)| : z \in E_\rho\}$ とすると，Gauss 則において

$$|I_n - I| \leq \frac{64M}{15(1 - \rho^{-2})\rho^{2n}} \quad (n \geq 1) \quad (3)$$

が成立する。//

だが， E_ρ には問題点がある。この問題点を解決するためには，膨らみのある E_ρ の代わりに，膨らみのない（実軸と平行な境界を持つ）領域 Ω_ρ を用いて新しい積分則を設計する。

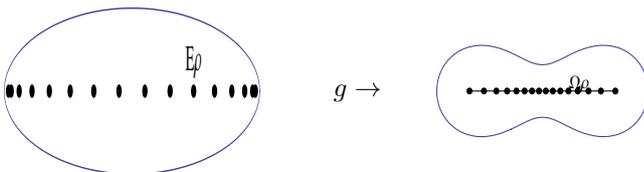


図 2.1

Ω_ρ を，図 2.1 のように， $[-1, 1]$ を内部に含む \mathbb{C} の閉集合とする。 g を

$$g(E_\rho) \subseteq \Omega_\rho, g(-1) = -1, g(1) = 1 \quad (4)$$

を満たす E_ρ 上の解析関数（等角写像）であるとする。そのとき $g([-1, 1])$ は Ω_ρ 内の解析的な曲線である。解析関数に関する Cauchy の定理によって，この曲線上の f の積分は $[-1, 1]$ 自体の上の f の積分と等しい。ゆえに，(1) は

$$I(f) = \int_{-1}^1 g'(s) f(g(s)) ds \quad (5)$$

と書き換えることができる。(5) に (2) を適用するなら，変換された積分公式

$$\tilde{I}_n = \tilde{I}_n(f) = \sum_{\kappa=1}^n \tilde{\omega}_\kappa f(\tilde{x}_\kappa) \quad \tilde{\omega}_\kappa = \omega_\kappa g'(x_\kappa) \quad \tilde{x}_\kappa = g(x_\kappa) \quad (6)$$

が得られる。

定理 2.2 ある $\rho > 0$ に対し， $f(z)$ は Ω_ρ で解析的であると仮定し， $M = \max_{z \in E_\rho} |f(z)|$ とする。このとき，条件 (4) を満たす g によって変換された Gauss 則 (6) の誤差は

$$|\tilde{I}_n - I| \leq \frac{64M\gamma}{15(1 - \rho^{-2})\rho^{2n}} \quad (n \geq 0) \quad (7)$$

によって評価される。ここで， $\gamma = \sup_{s \in E_\rho} |g'(s)| < \infty$ である。//

3 帯 Gauss 則

3.1 無限帯への写像

我々は， Ω_ρ を実軸に対称な無限帯領域 $\Omega_\rho = \{z | \Re z| < a\}$ とする。等角写像 $g : E_\rho \rightarrow \Omega_\rho$ は， g により ± 1 と楕円の左右端がそれぞれ ± 1 と $\pm\infty$ に写ることより，一意に定まり Ω_ρ の帯幅 a が定まる。この写像による積分則 (6) を帯 Gauss 則と呼ぶことにする。

E_ρ から Ω_ρ への等角写像 g とその導関数は，具体的に

$$g(s) = \tanh^{-1} \left(m^{1/4} \operatorname{sn} \left(\frac{2K}{\pi} \sin^{-1}(s) |m \right) \right) / \tanh^{-1}(m^{1/4}) \quad (8)$$

$$g'(s) = \frac{2K m^{1/4}}{\pi \sqrt{1-s^2}} \frac{\operatorname{cn}(\omega|m) \operatorname{dn}(\omega|m)}{(1 - m^{1/2} \operatorname{sn}^2(\omega|m) \tanh^{-1}(m^{1/4}))} \quad (9)$$

で与えられる。ここで， sn ， cn ， dn はヤコビ楕円関数である。その母数は

$$m^{1/4} = 2 \sum_{j=1}^{\infty} \rho^{-4(j-1/2)^2} / (1 + 2 \sum_{j=1}^{\infty} \rho^{-4j^2}) \quad (10)$$

で与えられる。また $\omega = 2K \sin^{-1}(s)/\pi$ である。

Ω_ρ の半幅は

$$a = \frac{\pi}{4 \tanh^{-1}(m^{1/4})} < \frac{2}{\pi} (\rho - 1) \quad (11)$$

である．そして $\rho \rightarrow 1$ に近づくととき， $a \sim (2/\pi)(\rho - 1)$ である．同じ制限で E_ρ の半幅は $\sim (\rho - 1)$ である．同じ収束率を得るために，変換後の公式では，被積分関数は元の $2/\pi$ の幅の帯領域で解析的であればよい．

定理 3.1 ある $\rho > 1$ に対して，実軸を含む半幅 $(2/\pi)(\rho - 1)$ の無限帯領域 Ω_ρ で， f が解析的であるとする． f を E_ρ から Ω_ρ への写像 (8) による帯 Gauss 則で積分した結果を \tilde{I}_n とする．そのとき，任意の $\tilde{\rho} < \rho$ に対して，

$$\tilde{I}_n - I = O(\tilde{\rho}^{-2n}) \quad (n \rightarrow \infty) \quad (12)$$

が成立する． //

3.2 帯 Gauss 則の標本点と重みの分布

帯 Gauss 則の標本点と重みの分布の特徴を，Gauss 則との比較で述べる．双方とも $n = 100$ 点則を設計して比較する．

数値実験で用いた $\rho = 1.4$ の帯 Gauss 則のグラフを図 3.1 に示す．

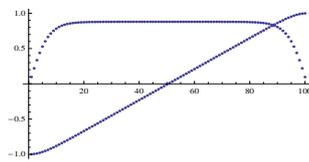


図 3.1 帯 Gauss 則 ($\rho = 1.4$) の標本点と重みの分布

次に，細い帯に対応する $\rho = 1.1$ の帯 Gauss 則のグラフを図 3.2 に示す． $\rho = 1.4$ と比較すると， x_i のグラフは，中央部の直線性がさらに強くなっている． w_i の分布も中央部の広い範囲でほぼ定数となっている．細い帯に対応する帯 Gauss 則は中央部の広い範囲で中点則とほぼ等しくなっていると考えられる．中点則との差は，積分区間端点にある．帯 Gauss 則は中点則端補正を施した積分則とも考えられる．

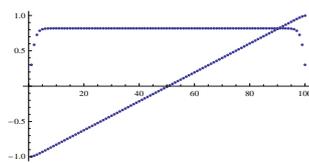


図 3.2 帯 Gauss 則 ($\rho = 1.1$) の標本点と重みの分布

4 数値実験

Trefethen の 9 つの被積分関数に関して，帯 Gauss 則が Gauss 則よりも速く収束するかどうか，Mathematica 6 による数値実験により比較する．

$$\begin{aligned} f(x) &= (1 + 20x^2)^{-1} \\ f(x) &= \log(1 + 50x^2) \\ f(x) &= (1.5 - \cos(5x))^{-1} \\ f(x) &= \exp(-40x^2) \\ f(x) &= \cos(40x) \\ f(x) &= \exp(-x^{-2}) \\ f(x) &= |x| - |x - 0.1| \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(x) &= (1.01 - x)^{1/2} \\ f(x) &= \cos(x) \end{aligned}$$

， ， ， のグラフは，帯 Gauss 則が Gauss 則より明らかに改善で，より速く収束していることが分かる．

のグラフは，帯 Gauss 則は初め Gauss 則より速く収束する．帯 Gauss 則の方が被積分関数の振動を早く捉えている．誤差が 10^{-5} より小さくなると，Gauss 則が勝つようになる．それは，被積分関数が整関数であるからである．

， のグラフは，解析的ではない．

のグラフに関して，Gauss 則は ± 1 付近で，弱い解析性条件のために勝つ．

のグラフに関して，帯 Gauss 則は収束率 $O(\rho^{-2n})$ に行き詰まる．

5 おわりに

今回の研究によって，Trefethen が示したグラフは，精度が正しくないことが分かった．Mathematica 6 による実験結果のグラフの方が，精度が正しく，より精密であることが分かった．また，帯 Gauss 則の標本点と重みの分布から， $\rho > 1$ に近づけると，標本点の S 字曲線，中央部の直線性はさらに強くなっていることが分かった．それに伴い，重みの分布は，上に凸で正の形から，中央部で凸正が弱まり，中央部の広い範囲でほぼ定数となっていることが分かった．このことから，帯 Gauss 則は中点則に端補正を施した積分則とも考えられる．

今後の課題は，さらに新しい変数変換の公式を探すことと，Gauss 則を Clenshaw-Curtis 則に交換する実験をすること．

6 参考文献

- [1] New quadrature formulas from conformal maps N. Hale & L. N. TREFETHEN: New quadrature formulas from conformal maps, SIAM J. Numer. Anal. Vol. 46, No. 2, pp. 930-948(2008) .
- [2] Rough and ready error estimates in Gaussian integration of analytic functions P. RABINOWITZ: Rough and ready error estimates in Gaussian integration of analytic functions, Comm. ACM, 12(1969), pp. 268-270 .
- [3] Quadraturverfahren H. BRASS: Quadraturverfahren, Vandenhoeck and Ruprecht, Göttingen, 1977 .
- [4] Is Gauss quadrature better than Clenshaw-Curtis? L. N. TREFETHEN Is Gauss quadrature better than Clenshaw-Curtis?, SIAM Rev., 50(2008), pp. 67-87 .