シークエント計算による基礎数学

2007MI011 新井雅川

指導教員：佐々木克巳

1　はじめに

本研究の目的は、数学における証明を、シークエント体系の視点から、より有効的に表現することである。表現すべき証明は、本学部の必修科目『情報数学』の講義において、主要に扱われる「集合」、「写像」の分野から抽出した。上の 2 分野のうち、特に「写像」の分野においては、いくつかの性質の、シークエント体系の視点から表現された証明を示した。そこでは、実際に証明を行う際の注意点などに着目し、証明の過程で誤った操作を行わない様に、シークエントで証明する際の規則性の重要さや、証明の図から読み取れる性質を追及した。

本稿では、卒業論文で示した証明のうち、「集合」の分野から 1 つ、「写像」の分野から 3 つを抽出して述べる。

シークエント体系として、ここでは、佐々木 [2] の SNK にしたがう。

2　集合

ここでは、佐々木 [1] の証明とシークエントによる証明を示し、2 つの証明の互いの有効性を比較する。扱う性質は、集合の包含関係である。また、記号 A, B を、集合を表す記号として用いる。

定理 2.1

$$A \not\subseteq B \Leftrightarrow \exists x(x \in A \wedge x \notin B)$$

[**佐々木 [1] の証明**]

$A \not\subseteq B \Leftrightarrow \neg(A \subseteq B)$
$\Leftrightarrow \neg\forall x(\in A \supset x \in B)$
$\Leftrightarrow \exists x \neg(x \in A \supset x \in B)$
$\Leftrightarrow \exists x(x \in A \wedge x \notin B)$

[**シークエントによる証明**]

$\{A \not\subseteq B\} \to \exists x(x \in A \wedge x \notin B)$ のみを示す。ただし、あらかじめ、文の列 "$a \in A, a \notin B$" を γ とおく。

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\{a \in A\} \to a \in A}{\{\gamma\} \to a \in A}\,(w\,\text{左}) \quad \dfrac{\{a \notin B\} \to a \notin B}{\{\gamma\} \to a \notin B}\,(w\,\text{左})}{\{\gamma\} \to a \in A \wedge a \notin B}\,(\wedge\text{右})}{\{\gamma\} \to \exists x(x \in A \wedge x \notin B)}\,(\exists\,\text{右})}{\{\neg\exists x(x \in A \wedge x \notin B), \gamma\} \to \bot}\,(\neg\text{左})}{\{\neg\exists x(x \in A \wedge x \notin B), a \in A\} \to a \in B}\,(RAA)}{\{\neg\exists x(x \in A \wedge x \notin B)\} \to a \in A \supset a \in B}\,(\supset\,\text{右})}{\{\neg\exists x(x \in A \wedge x \notin B)\} \to \forall x(x \in A \supset x \in B)}\,(\forall\,\text{右})}{\{\neg\exists x(x \in A \wedge x \notin B)\} \to A \subseteq B}\,(\text{定義})}{\{A \not\subseteq B, \neg\exists x(x \in A \wedge x \notin B)\} \to \bot}\,(\neg\text{左})}{\{A \not\subseteq B\} \to \exists x(x \in A \wedge x \notin B)}\,(RAA)$$

3　写像

集合 A から集合 B への写像とは、A の任意の要素に対して、B の要素を 1 つだけ対応させる規則のことである。f が A から B への写像であることを、

$$f : A \to B$$

と表す。

さらに図式、

$$\dfrac{\Gamma \to Q \quad \dfrac{\dfrac{\{P(g(f(x)))\} \cup \Gamma \to A}{\{Q, P(g(f(x)))\} \cup \Gamma \to A}\,(w\,\text{左})}{\{Q, P((g \circ f)(x))\} \cup \Gamma \to A}}{\{P((g \circ f)(x))\} \cup \Gamma \to A}\,(cut)$$

を

$$\dfrac{\{P(g(f(x)))\} \cup \Gamma \to A}{\{P((g \circ f)(x))\} \cup \Gamma \to A}$$

と略す。ただし、Q は $(g \circ f)(x) = g(f(x))$ であり、Γ は論理式の集合である。

ここでは、3 つの写像の性質を扱う。

(I) 恒等写像

定理 3.1

$f : A \to B, g : B \to B$ とする。g が恒等写像ならば $g \circ f = f$ である。

[**シークエントによる証明**]

あらかじめ、$g(f(a)) = f(a)$ を P とおき、$(g \circ f)(a) = f(a)$ を Q とおく。

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\{a \in A\} \to f(a) \in B \quad \dfrac{\{P\} \to P}{\{P, a \in A\} \to P}\,(w\,\text{左})}{\{f(a) \in B \supset P, a \in A\} \to P}\,(\supset\,\text{左})}{\{f(a) \in B \supset P, a \in A\} \to Q}\,(\text{定義})}{\{f(a) \in B \supset P\} \to a \in A \supset Q}\,(\supset\,\text{右})}{\{\forall x(x \in B \supset g(x) = x)\} \to a \in A \supset Q}\,(\forall\,\text{左})}{\{g\,\text{が恒等写像}\,\} \to a \in A \supset Q}\,(\text{定義})}{\{g\,\text{が恒等写像}\,\} \to \forall x(x \in A \supset (g \circ f)(x) = f(x))}\,(\forall\,\text{右})}{\{g\,\text{が恒等写像}\,\} \to g \circ f = f}\,(\text{定義})$$

(II) 全単射

定義 3.2

$f : A \to B$ とする。

(1)f が $\forall a_1 \forall a_2(a_1 \neq a_2 \to f(a_1) \neq f(a_2))$ をみたすとき、f を単射、あるいは 1 対 1 の写像という。

(2)f が $\forall b \exists a(b = f(a))$ をみたすとき、f を全射、あるいは上への写像という。

(3)f が単射でありかつ全射である、すなわち、(1) と (2) の 2 条件をみたすとき、f を全単射という。

定理 3.3(細井 [3])

g が単射であり $g \circ f$ が全射であれば、f は全射である。

[シークエントによる証明]

図 3.4 に示す。

(III) 逆写像

全単射 $f : A \to B$ に対して、

$f \circ f' = I_A$ あるいは $f' \circ f = I_B$ (I_A, I_B は恒等写像)

をみたす対応の規則 f' は、B から A への全単射である。この f' を f の逆写像といい、f^{-1} と表す。

定理 3.5

$f : A \to B, g : B \to B$ とし、f は全単射とする。このとき、$g \circ f = f$ ならば、g は恒等写像 である。

[シークエントによる証明]

図 3.6 に示す。

4 おわりに

本研究をとおして、シークエントによる証明によって、いくつもの重要な注意しなければいけない規則があることがわかった。例えば、シークエントの左辺と右辺で、式の形を揃えなければいけないということ。また、限定子において、自由な出現をもつかどうかということ。変数に何を代入すべきか考察して証明を進めていくことなどである。さらに、同じような問題に対して、異なる方法で、複数の解を見い出せることもわかった。このような規則をしっかりと守りながら証明を行うことで、数学の証明がシークエントによって、より楽しいものになるだろう。

参考文献

[1] 佐々木克巳:『南山大学情報理工学部「情報数学」講義資料』, 2009

[2] 佐々木克巳:『南山大学情報理工学部「数理論理学」講義内資料』, 2009

[3] 細井勉:『集合・論理』, 共立出版, 東京, 1982

図 3.4

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\{b \neq f(a)\} \to b \neq f(a)}{\{g(b) = (g \circ f)(a), b \neq f(a)\} \to b \neq f(a)}\;(w\,\text{左}) \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\{g(b) = g(f(a))\} \to g(b) = g(f(a))}{\{g(b) = g(f(a)), b \neq f(a)\} \to g(b) = g(f(a)),}\;(w\,\text{左})}{\{g(b) \neq g(f(a)), g(b) = g(f(a)), b \neq f(a)\} \to \bot}\;(\neg\,\text{左})}{\{g(b) \neq g(f(a)), g(b) = (g \circ f)(a), b \neq f(a)\} \to \bot}\;(\text{定義})}{\{b \neq f(a) \supset g(b) \neq g(f(a)), g(b) = (g \circ f)(a), b \neq f(a)\} \to \bot}\;(\supset\,\text{左})}{\{b \neq f(a) \supset g(b) \neq g(f(a)), g(b) = (g \circ f)(a)\} \to b = f(a)}\;(RAA)}{\{b \neq f(a) \supset g(b) \neq g(f(a)), g(b) = (g \circ f)(a)\} \to \exists a(b = f(a))}\;(\exists\,\text{右})}{\{\forall a_2(b \neq a_2 \supset g(b) \neq g(a_2)), g(b) = (g \circ f)(a)\} \to \exists a(b = f(a))}\;(\forall\,\text{左})}{\{\forall a_1 \forall a_2(a_1 \neq a_2 \supset g(a_1) \neq g(a_2)), g(b) = (g \circ f)(a)\} \to \exists a(b = f(a))}\;(\forall\,\text{左})}{\{\forall a_1 \forall a_2(a_1 \neq a_2 \supset g(a_1) \neq g(a_2)), \exists a(g(b) = (g \circ f)(a))\} \to \exists a(b = f(a))}\;(\exists\,\text{左})}{\{\forall a_1 \forall a_2(a_1 \neq a_2 \supset g(a_1) \neq g(a_2)), \forall c \exists a(c = (g \circ f)(a))\} \to \exists a(b = f(a))}\;(\forall\,\text{左})}{\{\forall a_1 \forall a_2(a_1 \neq a_2 \supset g(a_1) \neq g(a_2)), \forall c \exists a(c = (g \circ f)(a))\} \to \forall b \exists a(b = f(a))}\;(\forall\,\text{右})}{\{\forall a_1 \forall a_2(a_1 \neq a_2 \supset g(a_1) \neq g(a_2)) \wedge \forall c \exists a(c = (g \circ f)(a))\} \to \forall b \exists a(b = f(a))}\;(\wedge\text{左})
$$

図 3.6

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\{a \in B\} \to f^{-1}(a) \in A \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\{g(a) = a\} \to g(a) = a}{\{g(a) = a, a \in B\} \to g(a) = a}\;(w\,\text{左})}{\{g(f(f^{-1}(a))) = f(f^{-1}(a)), a \in B\} \to g(a) = a}\;(\text{定義})}{\{(g \circ f)(f^{-1}(a)) = f(f^{-1}(a)), a \in B\} \to g(a) = a}\;(\text{定義})}{\{f^{-1}(a) \in A \supset (g \circ f)(f^{-1}(a)) = f(f^{-1}(a)), a \in B\} \to g(a) = a}\;(\supset\,\text{左})}{\{f^{-1}(a) \in A \supset (g \circ f)(f^{-1}(a)) = f(f^{-1}(a))\} \to a \in B \supset g(a) = a}\;(\supset\,\text{右})}{\{\forall x(x \in A \supset (g \circ f)(x) = f(x))\} \to a \in B \supset g(a) = a}\;(\forall\,\text{左})}{\{\forall x(x \in A \supset (g \circ f)(x) = f(x))\} \to \forall x(x \in B \supset g(x) = x)}\;(\forall\,\text{右})}{\{g \circ f = f\} \to \forall x(x \in B \supset g(x) = x)}\;(\text{定義})}{\{g \circ f = f\} \to g\ \text{は恒等写像}}\;(\text{定義})
$$