自然演繹法による述語論理

2006MI004 安藤裕司
指導教員：佐々木克巳

1　はじめに

本研究の目的は，鹿島 [1] の第１章から第５章をもとに，自然演繹法による「等号付き一階述語論理の強完全性定理」を理解することである．具体的には，鹿島 [1] で省略されている証明を補うことを行い，卒業論文では補った証明をまとめた．

本稿では，自然演繹の健全性の証明と自然演繹の完全性を証明するための一つの補題について述べる．また，それらに必要なものについても述べる．

2　自然演繹法

ここでは，自然演繹法における導出図と推論規則について簡単に述べる．これらを用いて自然演繹法における証明可能性が定義されるが，その詳細は鹿島 [1] にしたがう．

導出図

自然演繹の導出図とは論理式が平面上に樹状に配置された図形である．ただし，その構成の方法は次の推論規則にしたがう．

推論規則

導出図は仮定から出発して結論へ向けて下向きに構成されていくが，この構成の仕方を定めたのが推論規則である．ここでは，本稿で必要な推論規則だけを列挙しておく．

$$\frac{\varphi \quad \psi}{\varphi \wedge \psi}\ [\wedge\text{導入}] \qquad \frac{\neg\varphi \quad \varphi}{\bot}\ [\neg\text{除去}] \qquad \frac{\bot}{\varphi}\ [\text{矛盾}]$$

$$\frac{\varphi \vee \psi \quad \begin{matrix}(\mathcal{A})\\ \rho\end{matrix} \quad \begin{matrix}(\mathcal{B})\\ \rho\end{matrix}}{\rho}\ [\vee\text{除去}]$$
$\mathcal{A}$ 中に仮定φ や $\mathcal{B}$ 中に仮定ψ があればここで解消.

$$\frac{\begin{matrix}(\mathcal{A})\\ \psi\end{matrix}}{\varphi \to \psi}\ [\to\text{導入}]$$
$\mathcal{A}$ 中に仮定φ があればここで解消.

$$\frac{\varphi \to \psi \quad \varphi}{\psi}\ [\to\text{除去}]$$

$$\frac{\begin{matrix}(\mathcal{A})\\ \varphi[y/x]\end{matrix}}{\forall x\varphi}\ [\forall\text{導入}](\text{注 }1) \qquad \frac{\forall x\varphi}{\varphi[t/x]}\ [\forall\text{除去}](\text{注 }2)$$

$$\frac{\varphi[t/x]}{\exists x\varphi}\ [\exists\text{導入}](\text{注 }2)$$

(注 1) x は変数記号．y は $\mathcal{A}$ 中の解消されていない仮定の中にも $\forall x\varphi$ の中にも自由出現しない変数記号で，φ 中の x に代入可能なもの．(注 2) x は変数記号．t は φ 中の x に代入可能な項．

3　論理式の真理値

論理式の真理値はストラクチャーを用いて定義される．ここでは，ストラクチャー $\mathcal{M}$(対象領域は $\mathcal{D}$) に対する論理式 $\forall x\psi$ の真理値の定義のみを述べる．その他の定義は鹿島 [1] にしたがう．

$$\mathcal{M}(\forall x\psi) = \text{真} \iff (\mathcal{D}\text{ の任意の要素の任意の名前 }\mathtt{a}\text{ に対して }\mathcal{M}(\psi[\mathtt{a}/x]) = \text{真}).$$

4　自然演繹の健全性

ここでは，自然演繹の健全性を証明する．

定理 4.1 (健全性定理)

$\mathcal{A}$ を任意の導出図とし，その結論を φ，解消されていない仮定を $\psi_1, \psi_2, ..., \psi_n$ とする．また $x_1, x_2, ..., x_k$ は互いに異なる変数記号で，これら以外の変数記号は $\varphi, \psi_1, \psi_2, ..., \psi_n$ 中に自由出現しないとする．そして $\mathcal{M}$ を任意のストラクチャーとし，$\mathtt{a}_1, \mathtt{a}_2, ..., \mathtt{a}_k$ はその対象領域 $\mathcal{D}$ の任意の要素の名前であるとする．すると次が成り立つ．

$$\mathcal{M}(\psi_1^*)=\cdots=\mathcal{M}(\psi_n^*)=\text{真ならば }\mathcal{M}(\varphi^*)=\text{真}. \quad (4.1)$$

ただし * は代入 $[\mathtt{a}_1/x_1][\mathtt{a}_2/x_2]\cdots[\mathtt{a}_k/x_k]$ を表す．

証明　(本研究では，この証明のうち鹿島 [1] で演習問題となっている部分を補った．本稿では，そのうちの $\forall$ 導入の場合の証明だけを述べる.)

● $\mathcal{A}$ が

$$\frac{\begin{matrix}(\mathcal{A}_1)\\ \rho[y/x]\end{matrix}}{\forall x\rho}\ [\forall\text{ 導入}]$$

という形の場合．$\forall$ 導入規則の変数記号に関する条件から y は次を満たす．

（ア）　y は ρ 中の x に代入可能な変数記号である．

（イ）　y は $\forall x\rho, \psi_1, \psi_2, ..., \psi_n$ 中に自由出現しない．

(4.1) を示すために

$$\mathcal{M}(\psi_1^*) = \mathcal{M}(\psi_2^*) = \cdots = \mathcal{M}(\psi_n^*) = \text{真} \qquad (4.3)$$

を仮定して，$\mathcal{M}((\forall x\rho)^*) = $ 真であることを示す．ここで二つの代入 $^{*+}$ と $^{*-}$ を次のように定義する．

1) y が $x_1, x_2, ..., x_k$ のどれかに等しいときには，* の y に対する代入だけを $[\mathtt{b}/y]$ に変更した代入を $^{*+}$ とする．y が $x_1, x_2, ..., x_k$ のどれとも等しくないときには，* に $[\mathtt{b}/y]$ を追加した代入を $^{*+}$ とする．ただし対象領域 $\mathcal{D}$ の任意の要素の任意の名前を $\mathtt{b}$ とする．
2) x が変数記号 $x_1, x_2, ..., x_k$ のどれかに等しいときは，* から x に対する代入を取り除いた残りの代入を $^{*-}$ とする．x がどれにも等しくないときは $*$ をそのまま $^{*-}$ とする．

(4.3) と代入 $^{*+}$ の定義と (イ) から，ψ_i^* と ψ_i^{*+} は同じであるので $\mathcal{M}(\psi_1^{*+}) = \mathcal{M}(\psi_2^{*+}) = \cdots = \mathcal{M}(\psi_n^{*+}) = $真となる．$\mathcal{A}_1$ に関する帰納法の仮定によって $\mathcal{M}((\rho[y/x])^{*+}) = $ 真となる．代入 $^{*+}$，$^{*-}$ の定義と（ア）より $\mathcal{M}(\rho^{*-}[\mathtt{b}/x]) = $ 真となる．したがって $\forall$ の真理値の定義と $\mathtt{b}$ の条件によっ

て，$\mathcal{M}(\forall x(\rho^{*-}))=$ 真となる．そして代入 $^{*-}$ の定義より $\mathcal{M}((\forall x\rho)^{*})=$ 真となる．

5 自然演繹の完全性

ここでは，自然演繹の完全性を証明するための一つの補題を示す．

定義 5.2 (矛盾，無矛盾)

Γ を論理式の集合とする．$\Gamma\vdash\bot$ であることを「Γ は矛盾する」といい，そうでないことを「Γ は無矛盾である」という．

F と B は変数記号の任意の集合で $F\cap B=\emptyset$ を満たすものとする．

論理式の集合 $\mathrm{Formula}_{F,B}$ と項の集合 Term_F を次のように定義する．

$$\mathrm{Formula}_{F,B}=\{\varphi\mid\varphi\ \text{は論理式で，}\ \mathrm{FVar}(\varphi)\subseteq F,\ \mathrm{BVar}(\varphi)\subseteq B.\}.$$

$$\mathrm{Term}_F=\{t\mid t\ \text{は項で，}\ \mathrm{Var}(t)\subseteq F.\}.$$

ただし $\mathrm{FVar}(\varphi)$,$\mathrm{BVar}(\varphi)$ はそれぞれ「φ 中に自由出現する変数記号の集合」,「φ 中に束縛出現する変数記号の集合」である．

定義 5.10 (極大，存在証拠)

Γ を $\mathrm{Formula}_{F,B}$ の任意の部分集合とする．次の条件 (ア) が成り立つことを「Γ は $\mathrm{Formula}_{F,B}$ に関して極大である」といい，(イ) が成り立つことを「Γ は Term_F の存在証拠を持つ」という．

(ア) 任意の論理式 φ に対して次が成り立つ．
 $\varphi\in\mathrm{Formula}_{F,B}$ ならば ($\varphi\in\Gamma$ または $(\neg\varphi)\in\Gamma$).

(イ) 任意の $\exists$ 論理式 $\exists x\varphi$ に対して次が成り立つ．
 $(\exists x\varphi)\in\Gamma$ ならば，ある $t\in\mathrm{Term}_F$ が存在して $\varphi[t/x]\in\Gamma$.

ただし「$\exists$ 論理式」とは先頭の論理記号が $\exists$ の論理式のことである．

定義 5.11 ($\mathbf{KeySet}_{F,B}$)

Γ を $\mathrm{Formula}_{F,B}$ の任意の部分集合とする．次の 3 条件が成り立つことを「Γ は $\mathrm{KeySet}_{F,B}$ である」という．

(1) Γ は無矛盾である．
(2) Γ は $\mathrm{Formula}_{F,B}$ に関して極大である．
(3) Γ は Term_F の存在証拠を持つ．

補題 5.12 ($\mathbf{KeySet}_{F,B}$ の性質)

Γ が $\mathrm{KeySet}_{F,B}$ ならば次が成り立つ．

(1) $(\varphi\land\psi)\in\Gamma\iff(\varphi\in\Gamma)$ かつ $(\psi\in\Gamma)$.
(2) $(\varphi\lor\psi)\in\Gamma\iff(\varphi\in\Gamma)$ または $(\psi\in\Gamma)$.
(3) $(\varphi\to\psi)\in\Gamma\iff(\varphi\notin\Gamma)$ または $(\psi\in\Gamma)$.
(4) $(\neg\varphi)\in\Gamma\iff\varphi\notin\Gamma$.
(5) $(\forall x\varphi)\in\Gamma\iff\mathrm{Term}_F$ の任意の要素 t に対して $\varphi[t/x]\in\Gamma$.
(6) $(\exists x\varphi)\in\Gamma\iff\mathrm{Term}_F$ のある要素 t が存在して $\varphi[t/x]\in\Gamma$.

ただし (1)∼(4) において φ,ψ は $\mathrm{Formula}_{F,B}$ の任意の要素であり，(5) ,(6) において x は B の任意の要素で φ は $(\forall x\varphi)\in\mathrm{Formula}_{F,B}$ となる任意の論理式である．

証明 (鹿島 [1] では (1) と (5) の証明のみを示し，他を演習問題としている．本研究では，鹿島 [1] の (1) と (5) の証明を導出図を用いて補い，さらに演習問題となっている部分も導出図を用いてその証明を与えた．本稿では，(1)〜(6) の $\Rightarrow$ と $\Leftarrow$ のうちからいくつかを抽出し，導出図で矛盾を示す部分だけを述べる.)

(1,$\Leftarrow$) $\{\varphi,\psi,\neg(\varphi\land\psi)\}$ が矛盾することを以下に示す．

$$\dfrac{\neg(\varphi\land\psi)\qquad\dfrac{\varphi\quad\psi}{\varphi\land\psi}\,[\land\text{導入}]}{\bot}\,[\neg\text{除去}]$$

(2,$\Rightarrow$) $\{\varphi\lor\psi,\neg\varphi,\neg\psi\}$ が矛盾することを以下に示す．

$$\dfrac{\varphi\lor\psi\qquad\dfrac{\neg\varphi\quad\varphi}{\bot}\,[\neg\text{除去}]\qquad\dfrac{\neg\psi\quad\psi}{\bot}\,[\neg\text{除去}]}{\bot}\,[\lor\text{除去}](\text{仮定}\varphi,\psi\text{を解消})$$

(3,$\Rightarrow$) $\{\varphi\to\psi,\varphi,\neg\psi\}$ が矛盾することを以下に示す．

$$\dfrac{\neg\psi\qquad\dfrac{\varphi\to\psi\quad\varphi}{\psi}\,[\to\text{除去}]}{\bot}\,[\neg\text{除去}]$$

(3,$\Leftarrow$) $\{\neg\varphi,\neg(\varphi\to\psi)\}$ が矛盾することを以下に示す．

$$\dfrac{\neg(\varphi\to\psi)\qquad\dfrac{\dfrac{\dfrac{\neg\varphi\quad\varphi}{\bot}\,[\neg\text{除去}]}{\psi}\,[\text{矛盾}]}{\varphi\to\psi}\,[\to\text{導入}](\text{仮定}\varphi\text{を解消})}{\bot}\,[\neg\text{除去}]$$

$\{\psi,\neg(\varphi\to\psi)\}$ が矛盾することを以下に示す．

$$\dfrac{\neg(\varphi\to\psi)\qquad\dfrac{\psi}{\varphi\to\psi}\,[\to\text{導入}]}{\bot}\,[\neg\text{除去}]$$

(5,$\Rightarrow$) $\{\forall x\varphi,\neg\varphi[t/x]\}$ が矛盾することを以下に示す．

$$\dfrac{\neg\varphi[t/x]\qquad\dfrac{\forall x\varphi}{\varphi[t/x]}\,[\forall\text{除去}]}{\bot}\,[\neg\text{除去}]$$

(6,$\Leftarrow$) $\{\varphi[t/x],\neg\exists x\varphi\}$ が矛盾することを以下に示す．

$$\dfrac{\neg\exists x\varphi\qquad\dfrac{\varphi[t/x]}{\exists x\varphi}\,[\exists\text{導入}]}{\bot}\,[\neg\text{除去}]$$

6 おわりに

本研究により，自然演繹法による「等号付き一階述語論理の強完全性定理」を理解することができた．

参考文献

[1] 鹿島亮：『数理論理学』．朝倉書店，東京，2009.