正規な様相論理の完全性定理と有限モデル性

2006MI208　安江彰悟
指導教員：佐々木克巳

1　はじめに

様相論理では, 日常的な思考の中に現れる推論を形式化し, 分析することが可能である. また, 様相論理では, 状況や場面や時間などの設定方法により, 様々な体系を考えることができるため, 様々な分野に広く応用されている. そのため, 社会に非常に役立つ応用方法を見つけられるかもしれないと考えた.

本研究では, 小野 [1] に沿って, 正規な様相論理について考える. とくに, 5つの公理型 **D**, **T**, **4**, **B**, **5** からできる体系を考える. 小野 [1] では, 体系 K, KT, KTB, S4, S5 の完全性定理と有限モデル性を証明しているが, 本研究では, これらの証明を補って理解し, 5つの公理型を組合せてできるすべての体系に対する形で, 完全性定理と有限モデル性をまとめた. 本稿では, この概観を述べる. また, そこからわかる決定可能性について簡単に述べる.

2　様相論理の導入

古典論理を, 以下に示す様相演算を用いて拡張し, 様相論理を定義する.

様相演算の意味

$\Box A \iff$ 必然的に A である
$\Diamond A \iff \neg\Box\neg A \iff A$ である可能性がある

これらの $\Box$ や $\Diamond$ を, **様相演算**という.
つぎに, 様相論理の論理式を定義する. ここでは, 様相命題論理についてだけ考える.

定義 2.1　様相論理の論理式 (命題論理の場合)

1)　それぞれの命題変数は論理式である.
2)　A, B がともに論理式ならば, $(A \wedge B), (A \vee B), (A \supset B), (\neg A), (\Box A)$ は, いずれも論理式である.

ただし, 混乱が生じない限り, カッコを省略して良い. また, $\Box$ の結合の強さは, $\neg$ の結合の強さと同じ とする. しばしば, $\neg\Box\neg A$ を $\Diamond A$ と省略する.

定義 2.2　**体系 K**

体系 K は, 古典命題論理の sequent 計算の体系 LK に, $\Box$ に関するつぎの推論規則をつけ加えたものである.

$$\frac{\Gamma \to \quad A}{\Box\Gamma \to \Box A}\,(\Box)$$

$$\left(\begin{array}{l}\text{ただし, } \Gamma \text{ が } B_1, \cdots, B_m \text{ のとき,}\\ \Box\Gamma \text{ は } \Box B_1, \cdots, \Box B_m \text{ を表す.}\end{array}\right)$$

様相論理には数多くの体系がある. ここでは, 推論規則として ($\Box$) を含むような様相論理 (**正規**な様相論理) だけを考える.

定義　様相論理の公理型

正規な様相論理を具体的に定義するために, いくつかの論理式の型 $\mathrm{X}_1, \cdots, \mathrm{X}_k$ に対し, 始式として

$$\to \mathrm{X}_i \quad (i = 1, \cdots, k)$$

をつけ加えることを行う. このようにして定義される様相論理を $\mathbf{KX_1} \cdots \mathbf{X}_k$ と表す. また, これらの $\mathrm{X}_1, \cdots, \mathrm{X}_k$ を, この様相論理の 公理型 という.

代表的な公理型

D : $\Box A \supset \Diamond A$
T : $\Box A \supset A$　　**4** : $\Box A \supset \Box\Box A$
B : $A \supset \Box\Diamond A$　　**5** : $\Diamond A \supset \Box\Diamond A$

3　クリプキによるセマンティクス

ここでは, クリプキ (S. Kripke) による, 様相論理のセマンティクスを与える.

定義 3.1　**クリプキ・フレーム**

空でない集合 M と, M 上の二項関係 R の対 (M, R) を, クリプキ・フレーム (または フレーム) と定義する. また, M および R を, それぞれこのクリプキ・フレームの 可能世界 の集合 および 到達可能関係 という.

定義 3.2　**クリプキ・モデル**

(M, R) をフレームとする.また, V を, 各命題変数 p に対し $V(p) \subseteq M$ となるような写像とする.このとき, V を, フレーム (M, R) 上の付値という.また, 3つ組 (M, R, V) を クリプキ・モデル という.

M の要素と論理式の間の二項関係 $\models$ を, 次のように再帰的に定義する. ただし, $a \models A$ であるとき,「(可能世界)a で A は真である」という.また, $a \not\models A$ とは,「$a \models A$ でない」ということである.

1) $a \models p \iff a \in V(p)$
2) $a \models A \wedge B \iff a \models A$ かつ $a \models B$
3) $a \models A \vee B \iff a \models A$ または $a \models B$
4) $a \models A \supset B \iff a \not\models A$ または $a \models B$
5) $a \models \neg A \iff a \not\models A$
6) $a \models \Box A \iff aRb$ となる全ての b に対し, $b \models A$

関係 $\models$ は付値 V から一意的に定まるので, 今後

は V と $\models$ を同一視して, $\models$ のことを「付値」といったり, $(M,R,\models)$ のことを「クリプキ・モデル」といったりする.

定義 3.3 恒真な論理式

フレーム (M,R) 上の任意の付値 $\models$ と M の任意の要素 a に対し, $a \models A$ となるとき, 論理式 A は (M,R) で恒真 であるという. クリプキ・モデル $(M,R,\models)$ において, ある $b\ (\in M)$ に対し, $b \not\models A$ となるとき, $(M,R,\models)$ で論理式 A は偽 であるという. また, ある付値 $\models$ に対し, A が $(M,R,\models)$ で偽であるとき, A はフレーム (M,R) で偽であるという.

２節で導入した５つの公理型については, 到達可能関係との間につぎの対応が存在する.

定理 3.1

任意のフレーム (M,R) に対し, つぎのことが成り立つ.

1) $\mathbf{T}$ が (M,R) で恒真 $\iff$ R が反射的
2) $\mathbf{4}$ が (M,R) で恒真 $\iff$ R が推移的
3) $\mathbf{D}$ が (M,R) で恒真 $\iff$ R が継続的
4) $\mathbf{B}$ が (M,R) で恒真 $\iff$ R が対称的
5) $\mathbf{5}$ が (M,R) で恒真 $\iff$ R がユークリッド的

本研究では, 小野 [1] で述べられている定理 3.1 の証明を補いながら理解し, それをまとめた.

ここで, 様相論理 L' を定義する.

様相論理 L'

様相論理 L' を, $\mathrm{KX}_1 \cdots \mathrm{X}_n$ の形とする. ただし, 各 X_i は, $\mathbf{D}$, $\mathbf{T}$, $\mathbf{4}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{5}$ のいずれかで, $\mathrm{X}_1, \cdots, \mathrm{X}_n$ はそれぞれ相異なる公理型であり, $0 \le n \le 5$ とする. 特に, $n=0$ の場合, L' は K を表すとする.

定義より, L' は重複も含めて,32$(=2^5)$ 通り存在する. 以下では, 様相論理 L' を中心に議論する.

また, これ以降, $P_{\mathbf{D}}(R)$, $P_{\mathbf{T}}(R)$, $P_{\mathbf{4}}(R)$, $P_{\mathbf{B}}(R)$, $P_{\mathbf{5}}(R)$ は, それぞれ R が「継続的である」,「反射的である」,「推移的である」,「対称的である」,「ユークリッド的である」を表すとする.

L' フレーム

L'フレームを, つぎのように定義する.

フレーム (M,R) に対して, (M,R) が $\mathbf{KX_1} \cdots \mathbf{X}_n$ フレーム であるとは, $P_{\mathrm{X}_1}(R)$ かつ $\cdots$ かつ $P_{\mathrm{X}_n}(R)$ であることと定義する.

特に, $n=0$ の場合, (M,R) が $\mathbf{K}$ フレーム であるとは, R に何の条件も存在しないことと定義する.

このとき, つぎの定理がなりたつ.

定理 3.3

任意の式 $\Gamma \to \Delta$ に対し,
$\Gamma \to \Delta$ が様相論理 L'で証明可能 $\Longrightarrow$ $\Gamma \to \Delta$ が任意の L'フレームで恒真

本研究では, 証明図の構成に関する帰納法, 及び 定理 3.1 を用いて定理 3.3 を証明した.

4 完全性定理

定理 4.1 (フレームに関する完全性)

任意の式 $\Gamma \to \Delta$ に対し,
$\Gamma \to \Delta$ が様相論理 L'で証明可能 $\Longleftrightarrow$ $\Gamma \to \Delta$ が任意の L'フレームで恒真

本研究では, 極大無矛盾, カノニカルなクリプキ・モデルなどを定義することで定理4.1 の ($\Longleftarrow$) を証明した. 逆は 定理 3.3 そのものである.

完全性定理は, 与えられた論理式, または式が証明可能でないことを示すときに, 有効に使われる. そのとき, 完全性定理は, 与えられた論理式を偽にするフレーム (M,R) が必ず存在することを保証している.

5 有限モデル性

有限モデル性は, 論理の決定可能性 を示すのに重要な性質である. 有限モデル性の証明方法としては, 濾過法がもっとも代表的な応用範囲の広い方法である. しかし, L' などのいくつかの論理に対しては, もっと簡単な「シュッテの方法」と呼ばれている方法で証明できる.

そこで, 本研究では, シュッテの方法を用いて, L' が有限モデル性を持つことを証明した.

6 決定可能性

論理が決定可能 であるとは, その論理において与えられた式 (または論理式) が証明可能 であるかどうかを判定する有限の手続きが存在する, ということである.

L' が有限モデル性を持つことから, L' が決定可能 であることが導かれる.

7 おわりに

本研究により, ５つの公理型すべての組合せでできる正規な様相論理の決定可能性 を導くことができた.

様相論理には, 他にも興味深い研究テーマがたくさん存在するので, 今後も研究を深めていきたい.

参考文献

[1] 小野 寛晰 :『情報科学における論理』. 日本評論社, (1994).