四色定理の証明

2006MI203 山森千絵
指導教員：杉浦洋

1 はじめに

四色定理は，すべての平面グラフが 4-彩色可能（隣接頂点が同色にならないように，4 色で頂点が彩色できる）という定理である．四色定理を証明するためには，最小反例が存在しないことを示せばよい．

本研究では 1976 年に初めて四色定理を証明した Appel, Haken[1, 2] と同じ方針に基づく N. Robertson ら [4] に沿って四色定理の証明を追う．

また，平面上の四色問題と球面上の四色問題は等価であるため，本研究は球面上で四色問題を考える．

最小反例が存在しないことを示すために，好配置とよばれる 633 個のグラフを定義する．まず，最小反例に好配置が現れれば，その彩色が部分グラフの彩色に帰着することを示す．したがって，最小反例には好配置は現れない．次に，放電法の技法により，最小反例が必ず好配置を含むことを示す．両者は矛盾し，したがって最小反例の存在が否定される．証明において，単調で膨大な部分にはコンピュータを用る．本研究では，コンピュータを導入する前段階までの証明を確認し，証明全体の構成を検討する．

2 好配置の集合

論文を通して，Σ を定められた二次元球面であるとする．

図形 G は閉集合 $U(G) \subseteq \Sigma$ と有限集合 $V(G) \subseteq U(G)$ の組 $(U(G), V(G))$ で，次の性質を満たす．

(i) $U(G) - V(G)$ は有限個の連結成分から成る．各連結成分を**辺**と呼ぶ．

(ii) 辺 e の閉包 $\bar{e}$ は弧で，$\bar{e} - e$ は $\bar{e}$ の相異なる 2 点から成る．

$V(G)$ の要素を G の**頂点**と呼ぶ．辺の集合を $E(G)$ と表す．v が $\bar{e}$ の端点なら，辺 e と頂点 v は**接する**という．この関係はグラフ $(V(G), E(G))$ を定める．以下，図形 G をグラフとみなし，グラフ理論的記述を併用する．規約 (ii) より G はループを含まない．頂点 v の**次数**は，それと接する辺の数で，$d(v)$ または $d_G(v)$ にで表す．$V(G) \subseteq V(H)$ かつ $E(G) \subseteq E(H)$ なら，図形 G は図形 H の**部分グラフ**という．$E(G)$ が，$V(G)$ の頂点を結ぶ H の辺全体からなるとき，G を H の**誘導部分グラフ**という．

$\Sigma - U(G)$ の連結成分を G の**面**という．$v \in \bar{r}$ ならば，面 r と頂点 v は**接する**という．$e \subseteq \bar{r}$ ならば，面 r と辺 e は**接する**という．境界が n 個の辺と頂点からなる面を，n **角形**という．**三角グラフ**は，すべての面が三角形である図形である．

$|V(T')| + |E(T')| < |V(T)| + |E(T)|$ を満たすすべての図形 T' が 4-彩色可能なら，図形 T を四色定理の**最小反例**という．四色定理を証明するために，我々は，最小反例が存在しないことを示す．

球面から長さ m の閉路 C を除いた集合 $\Sigma - C$ は二つの連結成分 Σ_N, Σ_S から成る．

$$V_C = V \cap C, V_N = V \cap \Sigma_N, V_S = V \cap \Sigma_S$$

と置き，誘導グラフ $G_N = G(V_C \cup V_N), G_S = G(V_C \cup V_S)$ を考える．このとき次の命題が成り立つ．

［命題 2.1］ $m \leq 4$ かつ $\min\{|V_N|, |V_S|\} \geq 1$，あるいは $m = 5$ かつ $\min\{|V_N|, |V_S|\} \geq 2$ なら，G の彩色は G_N, G_S の彩色に簡約される．//

命題の条件を満たす閉路を**短閉路**と呼ぶ．命題 2.1 から直ちに次の定理を得る．

［定理 2.1］ 最小反例は，連結かつ短閉路を持たない三角グラフである．//

図形 G の 1 つの面 r を指定し，面内の 1 点を除いた球面を $\mathbb{R}^2$ に Riemann 射影すれば，平面グラフを得る．面 r を**無限面**，その他の面を**有限面**と呼ぶ．**準三角グラフ**は，すべての有限面が三角形の連結平面グラフである．

配置 K は，準三角グラフ $G(K)$ と写像 $\gamma_K : V(G(K)) \to \mathbb{Z}_+$（$\mathbb{Z}_+$ は非負整数）により定義され，以下の性質を持つ．

(i) すべての頂点 v について，$G(K) \backslash v$ の連結成分の数は 2 以下である．また，その連結成分の数が 2 なら，$\gamma_K(v) = d_{G(K)}(v) + 2$ である．

(ii) 頂点 v が無限面に接していなければ $\gamma_K(v) = d_{G(K)}(v)$．接していれば，$\gamma_K(v) > d_{G(K)}(v)$ である．どちらの場合でも $\gamma_K(v) \geq 5$ である．

(iii) K はリングサイズ ≥ 2 を持つ．ここで，リングサイズは $\Sigma_v(\gamma_K(v) - d_{G(K)}(v) - 1)$ である．総和は無限面と接し $G(K) \backslash v$ が連結であるすべての頂点 v にわたる．

$G(K)$ を $G(L)$ に移す Σ の同型写像 ϕ で，$\gamma_L(\phi(v)) = \gamma_K(v)$ となるものが存在するとき，2 つの配置 K と L は**同型**であるという．

配置 K が三角グラフ T に**現れる**とは，$G(K)$ が T に誘導部分グラフとして，$G(K)$ の有限面が T の面となるように埋め込むことができ，さらにすべての頂点 $v \in V(G(K))$ について $\gamma_K(v) = d_T(v)$ が成立することである．

Robertson ら [4] は 633 個の配置からなる集合を構成し，その要素と同型な配置を**好配置**と呼んだ．そして，次の 2 つの定理を証明した．

［定理 2.2］ 最小反例には，好配置は現れない．//

［定理 2.3］ 短閉路を含まない三角グラフには，好配置が現れる．//

定理 2.1，定理 2.2 と定理 2.3 から，最小反例が存在しないことになり，四色定理は真となる．

3 可約配置

配置 K の無限面に K のリングサイズの長さを持つ閉路 R をとる．K の free completion S は $V(S) = V(K) \cup$

$V(R)$，$d_S(v) = \Gamma_K(v)(v \in K)$ を満たす唯一の準三角グラフである．

以下が成り立てば，準三角グラフ S は，リング R よる K の free completion であるという．すべての配置が free completion を持つことがわかる．

次に，閉路 R の 4-彩色の集合に関する適合性の概念について，説明する．適合的な彩色集合とは R を無限面の境界とする準三角グラフの彩色からある種の規則によって，誘導された彩色を R に制限したものの集合である．紙面の都合でこの概念を具体的に定義することができないので，その重要な性質を述べるにとどめる．

（i）空集合は**適合的**である．

（ii）適合的な集合の和集合は適合的である．

（iii）T が準三角グラフで，R はその無限面の境界とする．T の彩色を R に制限したもの全体は適合的である．

S をリング R が付随する配置 K の free completion とする．Γ^* を R の 4-彩色全体の集合とする．Γ を S の 4-彩色を R に制限したもの全体の集合とする．Γ' を $\Gamma^* - \Gamma$ に含まれる最大の適合的彩色集合とする.（これは，性質（i），（ii）より矛盾なく定義できる.）

配置 K が D **可約**であるとは，$\Gamma' = \varnothing$ となることである．明らかに，D 可約な配置が最小反例に現れない．

これまでの記号を踏襲して，$X \subseteq E(S) - E(R)$ が空でないとし，S で，X に属する辺をすべて縮退させてできたグラフを S' とする．S' の彩色を R に制限したもの全体の集合を Γ'' が $\Gamma'' \subseteq \Gamma$ を満たすとき，配置 K は C **可約**であるという．最小反例には C 可約な配置に現れない，ということは明らかである．

コンピューターにより，633 個の好配置の free completion に関する彩色を調べることにより，次の定理を得る．

［定理 3.2］ 好配置はすべて D 可約か C 可約である．

以上により，最小反例は好配置は現れない．よって，定理 2.2 は証明された．

4　不可避集合

以下の性質を満たす配置 W を**車輪**という．

（0）$G(W)$ は頂点 w と 2 つの閉路 C_1, C_2 を持つ．

（i）$\{w\}, V(C_1), V(C_2)$ は，互いに素で，それらの和集合は $V(G(W))$ である．

（ii）C_1 と C_2 は $G(W)$ の誘導部分グラフであり，$U(C_2)$ は $G(W)$ の無限面の境界である．

（iii）w は，C_1 のすべての頂点と接し，C_2 のいかなる頂点とも接しない．//

w を車輪の**軸**という．次の Birkhoff[3] の結果は重要である．

［定理 4.1］ 短閉路を持たない三角グラフ T で，頂点 v を軸とする唯一の車輪が T に現れる．そして，$5 \leq |V(C_1)| \leq |V(C_2)|$．//

放電器 P は，4 つ組（K, r, s, t）である．

（i）K は，配置である．

（ii）r は，正の整数である．

（iii）s と t は，$G(K)$ の相異なる隣接した頂点である．

（iv）すべての頂点 $v \in V(G(K))$ について，$G(K)$ における s, v 間，t, v 間の距離は ≤ 2 である．

放電器 P について，$r(P) = r$，$s(P) = s$，$t(P) = t$，$K(P) = K$ と書く．そして，r を**放電量**，s を**ソース**，t を**シンク**と呼ぶ．

放電器 P が三角グラフ T に現れるとは，配置 $K(P)$ が T に現れることである．放電器 P が車輪 W が現れるとは，配置 $K(P)$ が W に現れることである．

Robertson ら [4] は 32 種類の放電器からなる無限集合 Π を定義した．車輪 W について，$N_\Pi(W)$ を，

$$N_\Pi(W) = 10(6 - \gamma_W(w)) + \sum_{t(P)=w} r(P) - \sum_{s(P)=w} r(P)$$

で定義する．総和は条件を満たす Π の放電器全体にわたる．次の定理が成り立つ．

［定理 4.3］ 短閉路をもたない三角グラフには，$N_\Pi(W) > 0$ なる車輪 W が現れる．//

［定理 4.4］ $N_\Pi(W) > 0$ なる車輪 W には必ず好配置が現れる．//

主定理 2.3 は，定理 4.3 と定理 4.4 からただちに導かれる．

定理 4.4 を次の 3 つの定理に分ける．W の軸を w として，

（i）$d_W(w) \leq 6$ の場合，

（ii）$7 \leq d_W(w) \leq 11$ の場合，

（iii）$d_W(w) \geq 12$ の場合．

（i）と（iii）は手で証明される.（ii）はコンピュータを用いて証明されている．

5　おわりに

本研究では，N.Robertson ら [4] による四色定理の証明を検討した．まず，最小反例に好配置が現れれば，その彩色が部分グラフの彩色に帰着することを示し，定理 2.2 を証明した．次に，放電法の技法により，最小反例が必ず好配置を含むことを示し，定理 2.3 を証明した．それにより，矛盾する結果を導き，最小反例の存在を否定することができた．

参考文献

[1] K.Appele and W.Haken, Every planar map is four colorable, Part I, Discharging, Illinois J.Math, 21(1977), 429-490.

[2] K.Appele, W.Haken, and J.Koch, Every planar map is four colorable, Part II, Reducibility, Illinois J.Math, 21(1977), 491-567.

[3] George David Birkhoff：The Reducibility of Maps, American Journal of Mathematicts, Vol.35, No.2(1913), pp.115-128.

[4] N.Robertson, D.Sanders, P.Seymour, R.Thomas：The Four-Colour Theorem, Journal of combinatorial theory, Series B 70, 2-44(1997) Article No.TB971750.