3変数の論理関数族

2006MI194 請川裕晃
指導教員：佐々木克巳

1　はじめに

本研究では、細井 [1] でとりあげられている論理関数族について研究を進め、3 変数の論理関数から成る極小完全な族を全部見つけることを目的とする。

本稿では、ポストの定理を紹介し、極小完全について述べ、3 変数の極小完全な族の探索方法およびその個数について述べる。

2　完全論理関数族

この節では、論理関数の諸性質を踏まえて、ポストの定理について述べ、極小完全の定義を紹介する。真理値の n 重対 $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n)$ に 1 個の真理値を対応付ける関数を n 変数論理関数という。

定義 2.1

(1) 恒等式、$\overline{\varphi(x_1, x_2, \cdots, x_n)} = \varphi(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \cdots, \bar{x}_n)$ をみたす論理関数を自己双対関数という。

(2)n 変数論理関数 $\varphi(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ が、$x_i \leqq x_i{'} \Rightarrow \varphi \leqq \varphi[x_i{'}/x_i]$ を満たすとき、変数 x_i に関して単調増大であるという。すべての変数に関して単調増大である論理関数を単調増大関数という。

(3)$n+1$ 個の定数 $a_0, a_1, \cdots, a_n$ があって、$\varphi(x_1, x_2, \cdots, x_n) = a_0 \oplus a_1 x_1 \oplus \cdots \oplus a_n x_n$ であるとき、$\varphi(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ を線形関数という。

(4)$\varphi(0, 0, \cdots, 0) = 0$ のとき、φ を 0 保存関数という。

(5)$\varphi(1, 1, \cdots, 1) = 1$ のとき、φ を 1 保存関数という。

定義 2.2　S を論理関数の族としたとき、次の 4 条件によって論理関数族 $[S]$ を定義する。

1. x が変数 $\Rightarrow x \in [S]$
2. $\varphi(x_1, x_2, \cdots, x_n) \in S \Rightarrow \varphi(x_1, x_2, \cdots, x_n) \in [S]$
3. $\varphi(x_1, x_2, \cdots, x_n) \in [S]$, かつ
   $i = 1, 2, \cdots, n$ に対し $\psi_i \in [S]$
   $\Rightarrow \varphi(\psi_1, \psi_2, \cdots, \psi_n) \in [S]$
4. 上の 3 条件により $[S]$ の元だとわかるものだけが $[S]$ の元である。

任意の論理関数が $[S]$ に含まれるとき、S は完全であるという。

0 保存関数族、1 保存関数族、自己双対関数族、単調増大関数族、線形関数族をそれぞれ S_0, S_1, S_2, S_3, S_4 で表す。

定理 2.3(ポストの定理)　S を論理関数の族とする。いずれの $i(0 \leqq i \leqq 4)$ に対しても、$S \cap S_i{}^c \neq \emptyset$ であれば、S は完全である。

2 変数以上の論理関数において上の定理の逆も成り立つ。

定義 2.4　論理関数の族 S が完全ではあるが、S のどの元を除いてもその族が完全ではなくなるとき、S を極小完全という。例えば、1 変数論理関数から成る極小完全な族は 1 個である。

次の定理が成立するので、極小完全な族は、たかだか 4 個の元から成る。

定理 2.5　$\varphi \notin S_0 \Rightarrow \varphi \notin S_1$あるいは$\varphi \notin S_2$

3　3 変数の極小完全な族

この節では、3 変数の論理関数から成る極小完全な族を全部見つけ、それらを列挙していく。

まず、3 変数論理関数 φ に対して 5 重対 $E(\varphi)$ を次のように定義する。

$$E(\varphi) = (\varepsilon_0, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4)$$

ただし、

$$\varepsilon_i = 1 \Leftrightarrow \varphi \in S_i$$

である。

$2^5 = 32$ より、この 5 重対は 32 個存在する。この 5 重対 E のうち、$E = E(\varphi)$ をみたす 3 変数論理関数 φ が存在する E は 15 個ある。そのそれぞれの 15 個を、

$$\begin{gathered}
E_0 = (0,0,0,0,0), E_1 = (0,0,1,0,0), E_2 = (0,0,1,0,1), \\
E_3 = (0,1,0,0,0), E_4 = (0,1,0,0,1), E_5 = (0,1,0,1,1), \\
E_6 = (1,0,0,0,0), E_7 = (1,0,0,0,1), E_8 = (1,0,0,1,1), \\
E_9 = (1,1,0,0,0), E_{10} = (1,1,0,1,0), E_{11} = (1,1,1,0,0), \\
E_{12} = (1,1,1,0,1), E_{13} = (1,1,1,1,0), E_{14} = (1,1,1,1,1)
\end{gathered}$$

とおく。$E_i = E(\varphi)$ をみたす φ の 1 つを ψ_i とおく。

定理 2.5 より極小完全な族はたかだか 4 個の元から成る。元の数が 1,2 の族が完全かどうかは、ポストの定理とその逆により以下のように判別できる。

$\{\psi_i\}$ が完全
$\Leftrightarrow E(\psi_i) = (0,0,0,0,0) = E_0$
$\Leftrightarrow i = 0$

$\{\psi_i, \psi_j\}$ が完全
$\Leftrightarrow n = 1,2,3,4,5$ に対して、$E(\psi_i)$ の第 n 成分と $E(\psi_j)$ の第 n 成分のうち少なくとも 1 つは 0
$\Leftrightarrow n = 1,2,3,4,5$ に対して、$E(\psi_i)$ の第 n 成分と $E(\psi_j)$ の第 n 成分の積が 0

$$\Leftrightarrow \sum_{n=1}^{5}(「E(\psi_i) \text{ の第 } n \text{ 成分}」\times「E(\psi_j) \text{ の第 } n \text{ 成分}」) = 0$$

3 個の元から成る族および 4 個の元から成る族に関しても同様の議論ができる。

ここで、完全とわかった族からその真部分集合に完全なものがある族を除けば、極小完全をすべて挙げること

ができる。表 1～4 にそれらを列挙する。すると、

1 個の元から成る極小完全な族 $\cdots$ 56 個
2 個の元から成る極小完全な族 $\cdots$ 5520 個
3 個の元から成る極小完全な族 $\cdots$ 1073 個
4 個の元から成る極小完全な族 $\cdots$ 15 個
合計 $\cdots$ 6664 個

とわかる。

表 1　1 個の元から成る極小完全な族

$\{\psi_i\}$	ψ_i の数	合計
$\{\psi_0\}$	56	56

表 2　2 個の元から成る極小完全な族

$\{\psi_i, \psi_j\}(i < j)$	ψ_i の数	ψ_j の数	合計
$\{\psi_1, \psi_3\}$	4	60	240
$\{\psi_1, \psi_4\}$	4	3	12
$\{\psi_1, \psi_5\}$	4	1	4
$\{\psi_1, \psi_6\}$	4	60	240
$\{\psi_1, \psi_7\}$	4	3	12
$\{\psi_1, \psi_8\}$	4	1	4
$\{\psi_1, \psi_9\}$	4	42	168
$\{\psi_1, \psi_{10}\}$	4	14	56
$\{\psi_2, \psi_3\}$	4	60	240
$\{\psi_2, \psi_6\}$	4	60	240
$\{\psi_2, \psi_9\}$	4	42	168
$\{\psi_2, \psi_{10}\}$	4	14	56
$\{\psi_3, \psi_6\}$	60	60	3600
$\{\psi_3, \psi_7\}$	60	3	180
$\{\psi_3, \psi_8\}$	60	1	60
$\{\psi_4, \psi_6\}$	3	60	180
$\{\psi_5, \psi_6\}$	1	60	60
合計			5520

表 3　3 個の元から成る極小完全な族

$\{\psi_i, \psi_j, \psi_k\}$ $(i < j < k)$	ψ_i の数	ψ_j の数	ψ_k の数	合計
$\{\psi_2, \psi_4, \psi_{11}\}$	4	3	3	36
$\{\psi_2, \psi_4, \psi_{13}\}$	4	3	1	12
$\{\psi_2, \psi_5, \psi_{11}\}$	4	1	3	12
$\{\psi_2, \psi_5, \psi_{13}\}$	4	1	1	4
$\{\psi_2, \psi_7, \psi_{11}\}$	4	3	3	36
$\{\psi_2, \psi_7, \psi_{13}\}$	4	3	1	12
$\{\psi_2, \psi_8, \psi_{11}\}$	4	1	3	12
$\{\psi_2, \psi_8, \psi_{13}\}$	4	1	1	4
$\{\psi_4, \psi_7, \psi_9\}$	3	3	42	378
$\{\psi_4, \psi_7, \psi_{10}\}$	3	3	14	126
$\{\psi_4, \psi_7, \psi_{11}\}$	3	3	3	27
$\{\psi_4, \psi_7, \psi_{13}\}$	3	3	1	9
$\{\psi_4, \psi_8, \psi_9\}$	3	1	42	126
$\{\psi_4, \psi_8, \psi_{10}\}$	3	1	14	42
$\{\psi_4, \psi_8, \psi_{11}\}$	3	1	3	9
$\{\psi_4, \psi_8, \psi_{13}\}$	3	1	1	3
$\{\psi_5, \psi_7, \psi_9\}$	1	3	42	126
$\{\psi_5, \psi_7, \psi_{10}\}$	1	3	14	42
$\{\psi_5, \psi_7, \psi_{11}\}$	1	3	3	9
$\{\psi_5, \psi_7, \psi_{13}\}$	1	3	1	3
$\{\psi_5, \psi_8, \psi_9\}$	1	1	42	42
$\{\psi_5, \psi_8, \psi_{11}\}$	1	1	3	3
合計				1073

表 4　4 個の元から成る極小完全な族

$\{\psi_i, \psi_j, \psi_k, \psi_l\}$ $(i < j < k < l)$	ψ_i の数	ψ_j の数	ψ_k の数	ψ_l の数	合計
$\{\psi_5, \psi_8, \psi_{10}, \psi_{12}\}$	1	1	14	1	14
$\{\psi_5, \psi_8, \psi_{12}, \psi_{13}\}$	1	1	1	1	1
合計					15

つづいて、表 1～4 より、3 変数論理関数から成る極小完全な族の例を紹介する。

2 個の元から成る極小完全な族の例として、$\{\varphi_{129}, \varphi_{142}\} = \{\bar{x}\bar{y}\bar{z} \vee xyz, \bar{y}\bar{z} \vee x\bar{y} \vee x\bar{z}\}$ が挙げられる。$\varphi_{129} \notin S_0 \cup S_2 \cup S_3 \cup S_4$ かつ、$\varphi_{142} \notin S_0 \cup S_1 \cup S_3 \cup S_4$ となり、これは確かに極小完全の条件を満たす。

3 個の元から成る極小完全な族の例として、$\{\varphi_{43}, \varphi_{153}, \varphi_{170}\} = \{xy \vee y\bar{z} \vee x\bar{z}, \bar{y}\bar{z} \vee yz, \bar{z}\}$ が挙げられる。$\varphi_{43} \notin S_3 \cup S_4$ かつ、$\varphi_{153} \notin S_0 \cup S_2 \cup S_3$ かつ、$\varphi_{170} \notin S_0 \cup S_1 \cup S_3$ となり、これは確かに極小完全の条件を満たす。

4 個の元から成る極小完全な族の例として、$\{\varphi_0, \varphi_1, \varphi_{105}, \varphi_{255}\} = \{0, xyz, \bar{x}\bar{y}z \vee \bar{x}y\bar{z} \vee x\bar{y}\bar{z} \vee xyz, 1\}$ が挙げられる。$\varphi_0 \notin S_1 \cup S_2$ かつ、$\varphi_1 \notin S_2 \cup S_4$ かつ、$\varphi_{105} \notin S_3$ かつ、$\varphi_{255} \notin S_0 \cup S_2$ となり、これは確かに極小完全の条件を満たす。

4　終わりに

3 変数の極小完全な族は 6664 個もあることがわかった。特に、2 個の元から成る極小完全な族の多さには大変驚いた。2 変数の極小完全な族と同様、4 つの元から成る 3 変数の極小完全な族は存在しないかもしれないと思っていたが、3 変数の段階で 15 個あることもわかった。

参考文献

[1] 細井勉：『情報科学のための論理数学』. 日本評論社, 東京, 1992.