緊急患者の待ち行列の最適化

2006MI174 高崎潤也　　2006MI207 山崎友也
指導教員：澤木勝茂

1　はじめに

病院において，緊急患者がサービス（医療行為）を受けるまでの待ち時間を少しだけでも減らすということは，緊急患者の命を救うことに繋がる．いつどれだけの人数で運ばれてくるかわからない患者に対して、サービスをおこなう医者の数が少なければ，患者はサービスを受けるまで時間がかかってしまう．これは１分１秒の命を争う緊急患者にとっては大変な問題となる．反対に、医者の人数が多ければ，１人でも多くの患者の命を救うことができる．しかし，病院側にすると医者のシフトに無駄が生じ，さらに，人件費が大幅にかかってしまう．そこで，緊急患者の待ち時間がより少なく，かつ病院にとって利益を最大にできるような医者の人数に設定することが求められる．本論文では，これら双方の満足度をあげることのできる緊急患者の待ち行列の最適化について考察する．

2　モデルの設定

本論文では，事故発生地点から病院に運ばれるまでの距離と時間を考慮に入れた待ち行列を考える．緊急患者の事故発生は，不確実で起こるものとする．また，緊急患者を受け入れることのできる病院を２つ置くことにする．それぞれの病院の医者のサービス率は異なるものとし，緊急患者に備えて医者を何人か配置する．

４つのモデルを考える．まず１つ目のモデルは，先行研究の待ち行列に距離を加え，さらに緊急患者の手術に携われる医者の人数を変えたときの患者１人あたりの平均待ち時間を算出する．距離ごとにおいてどちらの病院に運ぶべきかを考える．[1] ２つ目のモデルは，医者１人の１回の手術にコストを与え，緊急患者に対しても平均待ち時間の分単位で死亡リスクにコストをかけ，これらのコストを足したものの最小値を算出することで，病院側にも患者側にも満足のいくものを考える．３つ目のモデルは，病院の２点間を結ぶ距離上のどの地点でも同じ確率で事故が起こるようにするために，確率変数を用いて連続型分布である一様分布を使って計算していくことで，どの地点で事故が起こった時にでも，最適な医者の人数を算出させれるものを考える．[2] ４つ目のモデルは，非割り込み抽選方式を取り入れたサービス率の異なる待ち行列 M/M/s を考える．[3][4][5] 手術においては複数の医者が一体となってサービスを提供すると仮定して，１，２，３つ目のモデルでは M/M/1 モデルを適用する．

2.1　記号の説明

λ　：単位時間当たりの事故発生率
μ　：平均サービス率
μ_1　：A 病院に対する平均サービス率
μ_2　：B 病院に対する平均サービス率
ρ　：窓口利用率
P_n　：系の中に n 人いる確率
W_{qA}　：A 病院に対しての平均待ち時間
W_{qB}　：B 病院に対しての平均待ち時間
N_1　：A 病院の医者の人数
N_2　：B 病院の医者の人数
L_A　：A 病院の系内にいる平均客数
L_B　：B 病院の系内にいる平均客数
L_{qA}　：A 病院の待ち行列の平均の長さ
L_{qB}　：B 病院の待ち行列の平均の長さ
m　：救急車の分速
a　：事故発生地点から病院までの距離（単位：m）
z　：２点間の病院の距離（単位：km）
c_1　：医者１人あたりにかかる人件費
c_2　：緊急患者１人あたりを待たせることによる費用 (単位：分)

3　診療所の待ち行列の説明

事故発生地点における患者の発生率を不確実とする．先行研究での病院における患者の待ち行列では，患者が病院に着いてからの待ちを考える．本論文では，事故した場所からの病院への移動距離と，病院での患者の待ち時間を算出し，２つの病院のどちらに向かったほうが患者にとって待ち時間が少なくなるかを考える．

先行研究では待ち行列でのサービス率 μ は，患者が医者に手術を受けてから終わるまでの時間を考えている．しかし，今回の新しいモデルの待ち行列では，

- 医者の人数によってサービス率を変化させる．
- 救急車の速度や距離に応じてサービス率を変化させる．

この２点を踏まえた新しいサービス率 μ_1 を用いる．また，このモデルで往来の平均待ち時間を用いると，事故を起こした場所から病院までの時間が含まれないため，新しい平均待ち時間 W_{qA}，W_{qB} を用いる．

- ２点間の病院の距離を z.
- 事故発生地点から A 病院までの距離を a.
- 事故発生地点から B 病院までの距離を $z-a$.

とする (図１参照).

事故地点における患者の発生はポアソン分布に従い，サービスは指数サービスでおこなわれる．

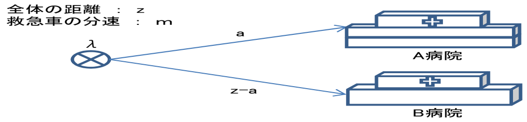

図１　距離によって変化する M/M/1 モデル

3.1 定式化

（M/M/1）
P_n を病院の中に n 人いる確率を表すとすれば，M/M/1 モデルでは，

$$P_n = \rho^n(1-\rho), \quad n = 0.1, 2\cdots \tag{1}$$

となる．
・A 病院の場合
$\frac{1}{N_1\mu}$ は，それぞれの医者の人数を変えることでサービス率を向上させ，$\frac{a}{m}$ は，救急車の速度や距離に応じてサービス率を変化させたものを，

$$\mu_1 = \frac{1}{\frac{1}{N_1\mu}+\frac{a}{m}}. \tag{2}$$

とする．
A病院における待ち行列の平均の長さは

$$\begin{aligned} L_{qA} &= \frac{\lambda^2}{\mu_1(\mu_1-\lambda)} \\ &= \frac{\lambda^2(m+N_1\mu a)^2}{N_1\mu m[N_1\mu m-\lambda(m+N_1\mu a)]}. \end{aligned} \tag{3}$$

A病院内にいる平均客数は

$$L_A = L_q + \frac{\lambda}{\mu_1}. \tag{4}$$

事故を起こした場所からA病院までの距離を含んだ平均待ち時間は

$$\begin{aligned} W_{qA} &= \frac{1}{\lambda}L_q + \frac{a}{m} \\ &= \frac{\lambda(m+N_1\mu a)^2}{N_1\mu m[N_1\mu m-\lambda(m+N_1\mu a)]} + \frac{a}{m}. \end{aligned} \tag{5}$$

・B 病院の場合，同様に

$$\mu_2 = \frac{1}{\frac{1}{N_2\mu}+\frac{b}{m}}, \tag{6}$$

$$\begin{aligned} L_{qB} &= \frac{\lambda^2}{\mu_2(\mu_2-\lambda)} \\ &= \frac{\lambda^2(m+N_2\mu b)^2}{N_2\mu m[N_2\mu m-\lambda(m+N_2\mu b)]}, \end{aligned} \tag{7}$$

$$L_B = L_q + \frac{\lambda}{\mu_2}. \tag{8}$$

$$\begin{aligned} W_{qB} &= \frac{1}{\lambda}L_q + \frac{b}{m} \\ &= \frac{\lambda(m+N_2\mu b)^2}{N_2\mu m[N_2 m-\lambda(m+N_2\mu b)]} + \frac{b}{m}. \end{aligned} \tag{9}$$

ただし，$b = z - a$ とする．

3.2 数値結果

タイプ１のモデルに、実際の数値を代入して緊急患者の距離ごとにおける，それぞれの病院への平均待ち時間を算出していく．数値は以下を用いる．

- 医者の技術は等しく，人数は最大５人
- 事故発生率を $\frac{1}{60}$(人/分)
- A 病院のサービス率 $\frac{1}{20}$(人/分)
- B 病院のサービス率 $\frac{1}{30}$(人/分)
- 救急車の速さを時速 50km と仮定する．
- 2 点間の病院の距離を１０ km（$z=$ １０）

と仮定し，事故発生地点を 1 km ごとに区切る．１ km〜９ km 間の距離ごとの平均待ち時間の平均を，医者の人数別に算出させた表を以下に示す.

表 1 異なる医者の人数時での平均待ち時間の平均

$N_1 \diagdown N_2$	1(人)	2(人)	3(人)	4(人)	5(人)
1(人)	44.67	22.33	19.50	18.52	18.04
2(人)	37.40	15.06	12．22	11.24	10.77
3(人)	36.14	13.80	10.97	9.99	9.51
4(人)	35.67	13.73	10.49	9.51	9.04
5(人)	35.42	13.08	10.25	9.27	8.79

4 死亡リスクコストを用いたモデルの説明

患者に医療行為をするために医者にかかる人件費を c_1 とする．患者の待ち費用を c_2 とする．これは，患者が病院につくまでに刻一刻と死に迫っている状況で，患者を待たせることによる死亡リスクを費用として表したものである．この２つを足して，その値が最小となるような医者の最適人数を求める．

4.1 定式化

診療所の待ち行列で求めた W_{qA} と W_{qB} を用いて相対コストを定式化すると以下になる．

$$\min\ (N_1+N_2)c_1 + \left(\frac{W_{qA}+W_{qB}}{2}\right)c_2 \tag{10}$$

第 1 項では，それぞれの病院の医者に対するコストを表し，第 2 項では，緊急患者に対する死亡リスクをコストに見立てたものを表す.

死亡リスクコストを用いたモデルに数値を代入していく．ここで，医者に対するコスト c_1 と緊急患者に対するコスト c_2 の価値を $c_1 > c_2$ と，$c_1 = c_2$，$c_1 < c_2$ の３パターンの場合を考える．

4.2 数値結果

式（7）を用いて，医者１人あたりにかかる人件費と緊急患者にかかる費用を価値に見立てて，$c_1 = c_2$，$c_1 > c_2$，$c_1 < c_2$ の時の場合分けを考え，医者にかかる人件費を３万円に固定し，患者にかかる費用を１万円，３万円，５万円の価値と考え計算結果を算出した時の最適な医者の人数を以下の表に示す．

表 2 それぞれの場合における医者の最適人数

	$c_1 > c_2$	$c_1 = c_2$	$c_1 < c_2$
A病院の医者（人）	2	2.6	3.2
B病院の医者（人）	2.4	3.3	4.1

5 事故発生場所からの搬送時間を考慮したモデルの説明

診療所の待ち行列のモデルの欠点として，ある地点で事故が発生すると仮定すると，そのある地点でしか事故が発生しないものと考えている．病院の 2 点間を結ぶ直線上のどの地点でも同じ確率で事故が起こるようにするために，一様分布の連続型分布である確率変数を用い計算していくことで，どの地点で事故が起こった時にでも，最適な医者の人数を算出することが可能となるモデルを考える．

5.1 定式化

診療所の待ち行列モデルで求めた平均待ち時間の式を一様分布の式にあてはめ，A 病院から B 病院を結んだ直線上のどの地点でも等しい確率で事故が起こるようにする．そして，その時の最適な医者の人数を求める．
第 4 章の W_{qA} を用いて，A 病院から B 病院までの平均待ち時間の期待値を考える．

$$E[W_{qA}] = \int_0^z \frac{W_{qA}}{z} da = \frac{N_1 \mu_A m}{10000\lambda} \int_0^{10000} \frac{1}{N_1 \mu_A (m - \lambda a) - \lambda m} da - \frac{\lambda + N_1 \mu_A}{N_1 \mu_A \lambda} \tag{11}$$

となる．同じく，B 病院から A 病院までの平均待ち時間の期待値を考える．

$$E[W_{qB}] = \int_0^z \frac{W_{qB}}{z} da = \frac{N_1 \mu_B m}{10000\lambda} \int_0^{10000} \frac{1}{N_1 \mu_B (m - \lambda a) - \lambda m} da - \frac{\lambda + N_1 \mu_B}{N_1 \mu_B \lambda} \tag{12}$$

となる．

5.2 数値結果

式 (11),(12) に第 4 章と同様，コスト別に数値を代入し，その時の最適な医者の人数を以下の表に示す．

表 3 それぞれの場合における医者の最適人数

	$c_1 > c_2$	$c_1 = c_2$	$c_1 < c_2$
A病院の医者（人）	2	3	3
B病院の医者（人）	2	3	4

6 優先順位を含めたサービス率の異なる待ち行列 M/M/s モデルの説明

ここで取り扱う M/M/s は，窓口 2 つであり，かつサービス率の異なるものである．また，非割り込み優先方式では，緊急患者と一般患者に優先順位をつけ，優先順位の高いものから，待ち行列の先頭に並んで行く方式である．

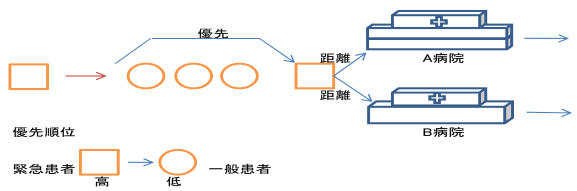

図 2 非割り込み優先方式モデル

6.1 新しく用いる記号の説明

λ_1 :緊急患者における単位時間当たりの事故発生率
λ_2 :一般患者における単位時間当たりの事故発生率
μ_{kA}:距離を考えた優先度 k での A 病院のサービス率
μ_{kB}:距離を考えた優先度 k での B 病院のサービス率
μ_a :優先度 1 での A の平均サービス率
μ_b :優先度 2 での A の平均サービス率
μ_c :優先度 1 での B の平均サービス率
μ_d :優先度 2 での B の平均サービス率
W_p :優先度 p の平均待ち時間
L_q :系内にいる平均客数
a_1 :事故発生地点の x 座標
a_2 :事故発生地点の y 座標

6.2 定式化

2 種類の優先順位があり，数の少ない方を優先度が高いとする．この場合，到着率：$\lambda_k(k$=1,2) となる．A 病院，B 病院それぞれサービス率が異なるので，サービス率は以下のように示す．
A 病院のサービス率: $\mu_{kA}(k = 1, 2)$

$$\mu_{1A} = \frac{1}{\frac{1}{N_1 \mu_a} + \frac{\sqrt{a_1^2 + a_2^2}}{m}},$$

$$\mu_{2A} = \frac{1}{\frac{1}{N_1 \mu_b} + \frac{\sqrt{a_1^2 + a_2^2}}{m}}.$$

B 病院のサービス率: $\mu_{kB}(k = 1, 2)$

$$\mu_{1B} = \frac{1}{\frac{1}{N_2 \mu_c} + \frac{\sqrt{a_2^2 + (d - a_1)^2}}{m}},$$

$$\mu_{2B} = \frac{1}{\frac{1}{N_2 \mu_d} + \frac{\sqrt{a_2^2 + (d - a_1)^2}}{m}}.$$

となる．
優先度 p のある客について考え，患者が時刻 t_0 でこのシステムに到着し，時刻 t_1 でサービスを受け始めたとする．

そうすると $T=t_1-t_0$ が患者の待ち時間になる．t_0 において，サービス中の客のサービスの残り時間を T_0,t_0 のときの既に行列の中にいる各グループ（それぞれ n_k 人）のサービス時間の，グループごと総和を，T_k，T という時間内に到着した優先度 k の客 $n_k^{'}$ 人のサービス時間の総和を $T_k^{'}$ とおく．そうすると，優先度 p の客の待ち時間は，

$$W_p=E(T)=\sum_{k=1}^{p-1}E(T_k^{'})+\sum_{k=1}^{p}E(T_k)+E(T_0). \tag{13}$$

まず $E(T_k)$ を求める．$E(T_k)$ は $E(\mathrm{n}_k)$ と $\frac{1}{\mu_{kA}+\mu_{kB}}$ との積であり，$E(\mathrm{n}_k)$ は W_k という時間内に単位時間あたり λ_k の割合で到着した優先度 k の客の平均数だから，

$$E(T_k)=\frac{1}{\mu_{kA}+\mu_{kB}}\lambda_k W_k. \tag{14}$$

同様の考えで $T_k^{'}$ は W_p の間の到着数であるから，

$$E(T_k^{'})=\frac{1}{\mu_{kA}+\mu_{kB}}\lambda_k W_p \tag{15}$$

となる．したがって，

$$W_p=\sum_{k=1}^{p-1}\frac{1}{\mu_{kA}+\mu_{kB}}\lambda_k W_p+\sum_{k=1}^{p}\frac{1}{\mu_{kA}+\mu_{kB}}\lambda_k W_k + E(T_0), \tag{16}$$

$$W_1=\frac{E(T_0)}{1-\frac{\lambda_1}{\mu_{1A}+\mu_{1B}}}=\frac{L_q}{\lambda_1}, \tag{17}$$

$$E(T_0)=\frac{L_q(1-\frac{\lambda_1}{\mu_{1A}+\mu_{1B}})}{\lambda_1}. \tag{18}$$

$E(T_0)$ は，$p=1$ としたものとサービス率の異なる M/M/2 モデルの平均待ち時間とが等しいとすれば求められるので，サービス率の異なる M/M/2 モデルを考える．
M/M/2 モデルの列の長さ L_q は，

$$L_q=\frac{\{4m_1m_2+2M+\frac{M(2M-1)}{(M-1)^2}\}-2}{\{M+2m_1m_2+\frac{M}{M-1}\}}. \tag{19}$$

全体平均待ち時間 W_q は、

$$W_q=\frac{1}{\lambda_1+\lambda_2}L_q. \tag{20}$$

ただし，

$$M=m_1+m_2,\quad m_1=\frac{\mu_{1A}}{\lambda_1},\quad m_2=\frac{\mu_{1B}}{\lambda_1}.$$

6.3 一様分布

今まで述べたモデルよりも，より正確な平均待ち時間を得るためには，一様分布を用いる必要がある．

6.3.1 一様分布の定式化

$$E[W_1]=\int_{x_2}^{x_1}\int_{y_2}^{y_1}\frac{E(T_0,x,y)}{1-\frac{\lambda_1}{\mu_{1A}(x,y)+\mu_{1B}(x,y)}}dydx$$

$$E[W_2]=\int_{x_2}^{x_1}\int_{y_2}^{y_1}\frac{\frac{\lambda_1 W_1(x,y)}{\mu_{1A}(x,y)+\mu_{1B}(x,y)}+E(T_0,x,y)}{1-\frac{\lambda_1}{\mu_{1A}(x,y)+\mu_{1B}(x,y)}-\frac{\lambda_2}{\mu_{2A}(x,y)+\mu_{2B}(x,y)}}dydx$$

6.4 数値結果

上記で述べてきたモデルに実際の数値を代入して，割り込みのある患者（緊急患者）と一般患者の平均待ち時間を算出していく．数値は以下を用いる．

- 医者の技術は等しく，人数は最大５人
- 緊急患者の発生率を $\frac{1}{75}$（人/分）
- 一般患者の発生率を $\frac{1}{80}$（人/分）
- A病院で受けるサービス率 $\frac{1}{60}$（人/分）
- B病院で受けるサービス率 $\frac{1}{70}$（人/分）
- 救急車の速さを時速５０ km
- 座標の範囲を $(0 \leqq a_1 \leqq 4, -2 \leqq a_2 \leqq 2)$
- A病院からB病院までの距離　$z=4$km
- A病院の座標を (0,0)，B病院の座標を (4,0)

a_1，a_2 の範囲を上で述べたようにし，小数を考えないものとすると，座標は全部で２５点とることができる．ゆえに，それぞれの地点で平均待ち時間を算出して，それを足して平均を考えれば，範囲内での平均待ち時間を算出することができる．その平均待ち時間を用い，今までと同様に最適な医者の人数を求めたものを以下に示す．

表 4 それぞれの場合における医者の最適人数

	$c_1>c_2$	$c_1=c_2$	$c_1<c_2$
A病院の医者（人）	2	3	3
B病院の医者（人）	1	1	2

7 おわりに

患者にかかる価値の費用を死亡リスクコストに見立て固定して算出したが，人の命には主観的な価値観と客観的な価値観があると考える．人によって死亡リスクを変えると平等ではなくなるので，今まで述べたような条件によっての分類は難しいと考える．

参考文献

[1] 小和田 正，澤木 勝茂，加藤 豊：『ＯＲ入門　意志決定の基礎』，実教出版株式会社 (1984)

[2] 尾崎 俊治：『確率モデル入門』，朝倉書店 (1996)

[3] 桐山 光引：『待ち行列がわかる本』，日刊工業新聞社 (1999)

[4] 丹羽 宏和：『病院における待ち行列理論』，南山大学数理情報学部数理科学科卒業論文（2000 年度）

[5] 毛利 公一：『診療所の待ち行列について』，南山大学数理情報学部数理科学科卒業論文（2003 年度）