古典命題論理の断片論理体系

2006MI167 鈴木啓介
指導教員：佐々木克巳

1 はじめに

本研究では、細井 [1] をもとに、古典命題論理について学び、理解することを目的とする。ここでは体系 CL を導入し、その断片論理体系を深く研究する。

本稿では、体系 CL について述べる。そして、付値関数などの説明をする。そして、断片論理体系について述べる。どちらも [1] に載っている問題を解いたり、証明を補っている。

2 体系 CL

体系 CL において、命題は論理式によって表現される。この論理式は、論理式の集合 WFF を次のように定義することによって定められる。

(1) a が命題変数 $\Rightarrow a \in$WFF

(2) $A, B \in$ WFF $\Rightarrow (A \supset B), (A \wedge B), (A \vee B) \in$ WFF

(3) $A \in$WFF $\Rightarrow \neg A \in$WFF

論理式の一番外側の括弧は、しばしば省略する。さらに、結合の強さを、強いほうから $\wedge$、$\vee$、$\supset$ の順だと約束して、括弧を省略する。

定義 2.1 公理と推論規則により有限的に CL の元だとわかるものだけが CL の元である。CL の元を (CL の) 定理という。

CL での証明可能性は、CL の元であることとして定義される。

3 付値関数

ここでは、付値関数について述べる。付値関数とは、すべての命題変数に 0 か 1 の値を対応させる関数である。

命題変数全体の集合を PVAR で表す。

定義 3.1 関数 f :PVAR$\rightarrow 0, 1$ を付値関数という。そして、論理記号に関数としての解釈を与えて、通常の方法で付値関数の定義域を WFF に拡張する。

定義 3.2 すべての付値関数 f に対して $f(A) = 1$ となる論理式 A を恒真式という。また、A は恒真であるともいう。恒真式全体の集合を TAUT で表す。

定理 3.3 TAUT=CL

4 断片論理体系

4 種類の論理記号を基本として議論を展開してきたが、もっと少数の論理記号の上で論理を定義する流儀もある。文字 I,C,D,N により、それぞれ、$\supset, \wedge, \vee, \neg$ を意味させることにし、WFF$_{IN}$ とは、$\supset, \neg$ 以外の論理記号を含まない論理式全体の集合とする。WFF$_{ICN}$ など、他の組み合わせについて同様に定義する。たとえば、TAUT $\cap$ WFF$_{IN}$ を、$\supset$,$\neg$ に関する断片論理という。これを TAUT$_{IN}$ で表す。この章では、これらの断片論理について述べる。

4.1 断片論理と TAUT との関係

TAUT$_{IN}$ を考えてみる。ここでは、

$$A \wedge B = \neg(A \supset \neg B)$$
$$A \vee B = \neg A \supset B$$

により $A \wedge B$ と $A \vee B$ とを定義すれば、本質的には、

$$\text{TAUT}_{IN} = \text{TAUT}_{ICDN}$$

とみなすことができる。つまり見かけ上は断片的であるが、実質的に、断片でないとうことである。しかし、すべてがこのように上手くいくわけではない。実質的にも断片でない例を以下に示す。

定理 4.1.1 $\supset$ から$\neg$ を定義できない (TAUT$_I$ は実質的に TAUT の断片論理でない)。

[証明]

ある $\supset$ だけの論理式 A があり $A \equiv \neg p$ が成り立てば、$\supset$ から$\neg$が定義できる。つまり、

$$\text{どの} \supset \text{だけの論理式} A \text{に対しても} A \not\equiv \neg p \qquad (1)$$

が成り立てば、$\supset$ から$\neg$ が定義できないということである。

全部の命題変数に t を割り当てる付置関数を v とする。$v(\neg p) = f$ なので

$$\supset \text{のみのどの論理式} A \text{についても} v(A) = t \qquad (2)$$

がいえれば (1) が示される。(2) を A に現れる $\supset$ の数 $n(A)$ についての帰納法で示す。

$n(A) = 0$ のとき : $v(A) = v(p) = t$ であり (2) を得る。

$n(A) > 0$ のとき : A より $\supset$ の数が少ない論理式 B に対して、(2) が成り立つ。すなわち、$v(B) = t$ であると仮定する。$n(A) > 0$ より $A = B \supset C$ と表せる。よって $v(A) = v(B \supset C)$ である。帰納法の仮定より $v(C) = t$ なので $v(B \supset C) = t$ であり、$v(A) = t$ となる。次に断片論理の中で、C,D,N,CD の 4 断片が空集合であることを証明する。

定理 4.1.2

$$\text{TAUT}_C = \text{TAUT}_D = \text{TAUT}_N = \text{TAUT}_{CD} = \emptyset$$

[証明]

TAUT$_{CD} = \emptyset$ を示す。全部の命題変数に f を割り当てる付値関数を v とする。題意は

$$\text{任意の} A \in WFF_{CD} \text{に対し} v(A) = f \qquad (3)$$

を示すことで証明される。(3) を A に現れる$\wedge$または$\vee$の数 $n(A)$ について帰納法で示す。

$n(A) = 0$ のとき：A は、ある命題変数 p に等しいので v の定義より $v(A) = v(p) = f$ である。

$n(A) > 0$ のとき：A は $B \wedge C$ か $B \vee C$ の形である。$n(A) > n(B), n(A) > n(C)$ だから帰納法の仮定より、$v(B) = v(C) = f$ である。

$A = B \wedge C$ のとき : $v(A) = v(B \wedge C)$ である。帰納法の仮定より $v(B) = v(C) = f$ なので $v(B \wedge C) = f$ であり、$v(A) = f$ となる。

$A = B \vee C$ のとき : $v(A) = v(B \vee C)$ である。帰納法の仮定より $v(B) = v(C) = f$ なので $v(B \vee C) = f$ であり、$v(A) = f$ となる。

よって (3) が証明されるので、$\mathrm{TAUT}_{CD} = \emptyset$ である。

$\mathrm{TAUT}_C = \emptyset$,$\mathrm{TAUT}_D = \emptyset$ も同様である。

$\mathrm{TAUT}_N = \emptyset$ を示す。

全部の命題変数に f を割り当てる付値関数を v_1 とし、全部の命題変数に t を割り当てる付値関数を v_2 とする。題意は A に現れる $\neg$ の個数を $n(A)$ としたとき

$$\begin{cases} n(A) \text{ が偶数のとき} & v_1(A) = f \\ n(A) \text{ が奇数のとき} & v_2(A) = f \end{cases} \tag{4}$$

を示すことで証明される。よって、$n(A)$ についての帰納法で (4) を示す。

$n(A) = 0$ のとき : $n(A)$ は偶数なので、$v_1(A) = f$ を示せばよい。また、$n(A) = 0$ より A はある命題変数 p に等しいので、v_1の定義より $v_1(A) = v_1(p) = f$ である。

$n(A) = 1$ のとき : $n(A)$ は奇数なので、$v_2(A) = f$ を示せばよい。$n(A) = 1$ より、ある命題変数 p に対して $A = \neg p$ である。v_2の定義より $v_2(A) = v_2(\neg p) = f$ である。

$n(A) > 1$ のとき : A は$\neg\neg B$ の形である。$n(A) > n(B)$ だから帰納法の仮定により

$$\begin{cases} n(B) \text{ が偶数のとき} & v_1(B) = f \\ n(B) \text{ が奇数のとき} & v_2(B) = f \end{cases} \tag{5}$$

$n(A)$ が偶数のとき、$n(B)$ も偶数なので、上の帰納法の仮定 (5) より $v_1(B) = f$ であり、$v_1(A) = v_1(\neg\neg B) = f$ となる。$n(A)$ が奇数のとき、$n(B)$ も奇数なので、上の帰納法の仮定 (5) より $v_2(B) = f$ であり、$v_2(A) = v_2(\neg\neg B) = f$ となる。

4.2 TUAT_I の公理体系

TAUT_I に対する公理系としては、CL の公理のうち $(\supset_1), (\supset_2), (\supset_3)$ の 3 つをとればよいことが、公理系の分離的であることからわかる。また

$$((p \supset q) \supset r) \supset ((r \supset p) \supset (s \supset p))$$

で公理化されることも知られている。ここでは、次の定理を示す。

定理 4.2.1([2]) $((p \supset q) \supset r) \supset ((r \supset p) \supset (s \supset p))$ だけを公理とし、分離規則を推論規則として、次が証明できる。

$(i) p \supset p$

$(ii) p \supset (q \supset p)$

$(iii) (p \supset q) \supset ((q \supset r) \supset (p \supset r)$

[証明]

まず 1 つの規則を導入する。 $(p \supset q) \supset r$ が定理のとき、公理 $((p \supset q) \supset r) \supset ((r \supset p) \supset (s \supset p))$ と分離規則を用いることで $(r \supset p) \supset (s \supset p)$ が定理であることが導かれる。この規則を (I) とする。つまり

$$(p \supset q) \supset r \quad \Rightarrow \quad (r \supset p) \supset (s \supset p) \tag{I}$$

が成り立つ。

本稿では $(i) p \supset p$ のみを示す。

1. $((p \supset q) \supset r) \supset ((r \supset p) \supset (s \supset p))$
2. 1 と規則 (I) より
   $(((r \supset p) \supset (s \supset p)) \supset (p \supset q)) \supset (r \supset (p \supset q))$
3. 2 と規則 (I) より
   $((r \supset (q \supset q)) \supset ((r \supset p) \supset (s \supset p))) \supset (t \supset ((r \supset p) \supset (s \supset p)))$
4. 3 に $r = p \supset q, t = p \supset p$ を代入すると
   $(((p \supset q) \supset (p \supset q)) \supset (((p \supset q) \supset p) \supset (s \supset p))) \supset$
   $((p \supset p) \supset (((p \supset q) \supset p) \supset (s \supset p)))$
5. 公理に $r = p \supset q$ を代入すると
   $((p \supset q) \supset (p \supset q)) \supset (((p \supset q) \supset p) \supset (s \supset p))$
6. 4 と 5 から
   $(p \supset p) \supset (((p \supset q) \supset p) \supset (s \supset p))$
7. (i) と 6 から
   $((p \supset q) \supset p) \supset (s \supset p)$
8. 7 と規則 (I) より
   $((s \supset p) \supset (p \supset q)) \supset (r \supset (p \supset q))$
9. 8 に $s = p \supset q, q = p, r = ((p \supset q) \supset r) \supset ((r \supset p) \supset (s \supset p))$ を代入すると
   $(((p \supset q) \supset p) \supset (p \supset p)) \supset ((((p \supset q) \supset r) \supset ((r \supset p) \supset (s \supset p))) \supset (p \supset p))$
10. 7 に $s = p$
    $((p \supset q) \supset p) \supset (p \supset p)$
11. 9 と 10 から
    $(((p \supset q) \supset r) \supset ((r \supset p) \supset (s \supset p))) \supset (p \supset p)$
12. 1 と 11 から
    $p \supset p$

おわりに

本研究では、ウカシェビッチの公理をもとに、定理を証明した。今ある情報を有効に使えるよう、工夫して考えることが大事であると分かった。これからも、問題を解く際は、何が使えるのかをよく把握し、情報を最大限生かせるように取り組みたい。

参考文献

[1] 細井勉 :『情報科学のための論理数学』. 日本評論社, 東京, 1992.

[2] Jan Łukasiewicz :" The shortest axiom of the implicational calculus of propositions", Proceedings of the Royal Irish Academy. Section A. Mathematical and Physical Sciences, pp. 25–33, 1948.